Math. P.
361r

Math. P.

361 P

Möller

Zur

Transformation der Thetafunctionen.

Inaugural-Dissertation

einer

hohen philosophischen Facultät

der

Universität Rostock

zur

Erlangung der philosophischen Doctorwürde

vorgelegt

von

Ferdinand Möller
aus Parchim.

Greifswald.
Druck von F. W. Kunike.
—
1884.

Zur

Transformation der Thetafunctionen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doctorwürde

von der

hohen philosophischen Facultät

der

Referent:

Prof. Dr. **M. Krause.**

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Herrn Prof. Dr. M. Krause

in dankbarer Hochachtung

gewidmet

vom Verfasser.

In seinem handschriftlichen Nachlasse bringt Gauss meist ohne Ableitung und Beweis eine Reihe sehr eleganter Beziehungen zwischen Functionen, die sich später als identisch mit den Jacobi'schen Thetafunctionen erwiesen. Die methodische Aufstellung dieser Beziehungen ist schon wiederholt der Gegenstand von mathematischen Arbeiten gewesen, besonders haben sich Herr Professor Schröter und seine Schüler vielfach mit diesem Thema beschäftigt. In der Tat ist es auch Herrn Dr. Göring gelungen, eine einheitliche und zum Teil noch erweiterte Darstellung dieser Beziehungen zu geben, und zwar auf Grund der Inaugural-Dissertation und der Habilitationsschrift von Herrn Prof. Schröter (cf. Göring, Ueber die Teilwerte der Jacobi'schen Thetafunctionen, Math. Annalen VII. 1874. Pag. 311 etc.).

In neuerer Zeit hat nun Herr Prof. Krause in den Acta mathematica 3. Pag. 93 etc. eine Notiz veröffentlicht, in der er nachweist, dass man auch unmittelbar durch die Transformationsgleichungen zu solchen Beziehungen gelangen müsse, wenn man einerseits die in ihnen auftretenden Coefficienten nach der gewöhnlichen Methode durch die Wurzelwerte der Gleichungen bestimmt und andrerseits Relationen zwischen diesen Coefficienten herstellt, indem man jedes Glied der Gleichungen nach Potenzen des Arguments entwickelt und dann die Coefficienten gleich hoher Potenzen auf beiden Seiten einander gleich setzt.

In Folge dieser Wahrnehmung liess Herr Prof. Krause während des vorigen Semesters im mathematischen Seminar nach dieser Richtung hin arbeiten, und übernahm ich gegen Schluss des Semesters, nachdem für den speciellen Fall $n = 3$ die Gleichungen Göring § 3 (3) und (8) gefunden waren, die vollständige Durchführung dieser Untersuchung, um die Anwendbarkeit dieser Methode sowohl für den allgemeinen Fall, als auch für die speciellen Fälle nachzuweisen.

In der Tat stellte es sich auch im Laufe der Arbeit heraus, dass man auf diesem Wege nicht nur die Göring'schen Formeln erhält, sondern eine unbeschränkte Anzahl von Beziehungen zwischen diesen Grössen aufstellen kann, dass ferner die von Göring angegebenen Formeln zum Teil in viel allgemeinerem Sinne gelten, und dass endlich für den allgemeinen Fall diese Methode viel weiter reicht; und dabei ist diese Methode so ausserordentlich einfach, es kommt lediglich darauf an, die Theta- resp. Elliptischen Functionen und deren Potenzen und Producte in nach Potenzen des Arguments fortschreitenden Reihen zu entwickeln und dann die erhaltenen Resultate geschickt zu combiniren. Es ist somit das nach der Göring'schen Arbeit so complicirt erscheinende Problem zurückgeführt auf das in neuerer Zeit so vielfach behandelte Problem die Theta- resp. Elliptischen Functionen und deren Potenzen in Potenzreihen zu entwickeln. Die Arbeiten, die hierfür besonders in Betracht kommen, sind:

Jacobi, Darstellung der elliptischen Functionen durch Potenzreihen Crelle Journal LIV. 1857 (cf. auch Schellbach, Elliptische Integrale §§ 93—96).

Die Arbeiten von Didon (Annales de Mathématiques 1872)
von Moreau Nouvelles Annales 1876
von Hermite Crelle Journal 1876 und besonders
Désiré André, Développements en séries des fonctions elliptiques et de leurs puissances. Annales de l'École Normale VI. 1878. Pag. 265 etc.

Charakterisch ist noch für diese Methode, dass die Beziehungen zwischen den transformirten Thetafunctionen mit dem Argument 0 unter einander von den Beziehungen zwischen diesen und den Teilwerten der Thetafunctionen vollständig unabhängig gefunden werden.

In der vorliegenden Arbeit ist nur erst der specielle Fall der unpaaren Transformation behandelt, es leuchtet jedoch sofort ein, dass die hier befolgte Methode mit unwesentlichen Modificationen auch auf den paaren Transformationsgrad angewandt werden kann.

— Besonderes Gewicht ist darauf gelegt, für die speciellen Fälle sämmtliche unter diesen Gesichtspunkt fallende Gauss'sche und Göring'sche Relationen zu erhalten, und habe ich deshalb unter jeder Formel die entsprechende Göring'sche in Klammer citirt und nur die nicht von Göring gebrachten Relationen zum Teil mit grossen lateinischen Buchstaben bezeichnet.

Was speciell den Gang der Abhandlung anlangt, so sind im ersten Abschnitt die Beziehungen zwischen den transformirten Thetafunctionen für das Argument 0, also die sogenannten Gauss'schen Relationen, aufgestellt und im zweiten Abschnitt die Beziehungen zwischen diesen und den Teilwerten der Thetafunctionen, und zwar befindet sich für jeden Abschnitt in § 1 das zu Grunde gelegte Material zusammengestellt, in § 2 die allgemeinen Untersuchungen, in § 3 die speciellen Betrachtungen für $n = 3$, und in § 4 die für $n = 5$.

Schliesslich möchte ich noch an dieser Stelle Herrn Prof. Krause öffentlich meinen Dank aussprechen für das Interesse, welches er dieser Arbeit stets entgegenbrachte, und für die Bereitwilligkeit, mit der er mir zu jeder Zeit die nötigen Hülfsmittel an die Hand gab.

Abschnitt I.

§ 1.

Für diese ganze Arbeit kommt nur in Betracht die Kenntnis der Theorie der Thetafunctionen und der elliptischen Functionen, soweit Jacobi sie in den ersten sechs Paragraphen seiner Abhandlung „Theorie der elliptischen Functionen aus den Eigenschaften der Thetareihen abgeleitet" bringt, also die Kenntnis des Zusammenhanges der Thetafunctionen unter einander und mit dem elliptischen Integral erster Gattung und das Additionstheorem der Thetafunctionen und der elliptischen Functionen; ferner die Kenntnis der drei Transformationsgleichungen für den unpaaren Transformationsgrad, welche die Grundlage dieser ganzen Abhandlung bilden:

$$\text{I.}\quad (-1)^{\frac{t-1}{2}}\vartheta_1(v',\tau') = x_1\vartheta_1{}^n(v,\tau) + x_2\vartheta_1{}^{n-2}(v,\tau)\vartheta_0{}^2(v,\tau) + \ldots$$
$$\ldots + x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_1(v,\tau)\vartheta_0{}^{n-1}(v,\tau)$$

$$\text{II.}\quad (-1)^{\frac{t-1}{2}}\vartheta_1(v',\tau') = x_1\vartheta_1{}^n(v,\tau) + x_2\vartheta_1{}^{n-2}(v,\tau)\vartheta_2{}^2(v,\tau) + \ldots$$
$$\ldots + x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_1(v,\tau)\vartheta_2{}^{n-1}(v,\tau)$$

III. $$(-1)^{\frac{t-1}{2}}\vartheta_1(v',\tau') = x_1\vartheta_1{}^n(v,\tau) + x_2\vartheta_1{}^{n-2}(v,\tau)\vartheta_3{}^2(v,\tau) + \ldots$$
$$\ldots + x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_1(v,\tau)\vartheta_3{}^{n-1}(v,\tau)$$

wo n irgend eine beliebige ungerade Zahl ist, ferner $v' = tv$, $\tau' = \frac{t\tau - 8\xi}{t_1}$, wenn t ein Teiler von n, $t_1 = \frac{n}{t}$ und ξ eine beliebige ganze Zahl (0 incl.) $< t_1$, aber ohne einen gemeinsamen Teiler mit t und t_1 zugleich ist.

(cf. Königsberger, die Transformation der elliptischen Functionen).

Vermehrt man in diesen Gleichungen das Argument um halbe Perioden der Einheit und des Moduls τ, so folgen aus denselben unmittelbar auch die Ausdrücke für die drei andern transformirten Thetafunctionen, so dass man aus diesen drei Gleichungen sofort drei Gleichungssysteme von je vier Gleichungen erhält, die man vereinigt so schreiben kann:

A.

1) $$\vartheta_{\alpha_1}(v',\tau') = x_1\vartheta_{\alpha_1}{}^n(v,\tau) \pm x_2\vartheta_{\alpha_1}{}^{n-2}(v,\tau)\vartheta_1{}^2(v,\tau) + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_{\alpha_1}(v,\tau)\vartheta_1{}^{n-1}(v,\tau)$$

2) $$\vartheta_{\alpha_2}(v',\tau') = x_1\vartheta_{\alpha_2}{}^n(v,\tau) \pm x_2\vartheta_{\alpha_2}{}^{n-2}(v,\tau)\vartheta_{\alpha_2}{}^2(v,\tau) + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_{\alpha_2}(v,\tau)\vartheta_{\alpha_2}{}^{n-1}(v,\tau)$$

3) $$\vartheta_{\alpha_3}(v',\tau') = x_1\vartheta_{\alpha_3}{}^n(v,\tau) \pm x_2\vartheta_{\alpha_3}{}^{n-2}(v,\tau)\vartheta_{\alpha_2}{}^2(v,\tau) + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_{\alpha_3}(v,\tau)\vartheta_{\alpha_2}{}^{n-1}(v,\tau)$$

4) $$(-1)^{\frac{t-1}{2}}\vartheta_1(v',\tau') = x_1\vartheta_1{}^n(v,\tau) + x_2\vartheta_1{}^{n-2}(v,\tau)\vartheta_{\alpha_1}{}^2(v,\tau) + \ldots$$
$$\ldots + x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_1(v,\tau)\vartheta_{\alpha_1}{}^{n-1}(v,\tau)$$

wo die Indices α nach einander für die drei Fälle die Werte annehmen:

für I. $\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 2,\ \alpha_3 = 3$
für II. $\alpha_1 = 2,\ \alpha_2 = 3,\ \alpha_3 = 0$
für III. $\alpha_1 = 3,\ \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = 2$

und wo im ersten Fall rechts überall das positive Zeichen zu wählen ist, im zweiten in den Ausdrücken für ϑ_{α_2} und ϑ_{α_3} abwechselnd positives und negatives Zeichen, und ein gleiches im dritten Fall in den Ausdrücken für ϑ_{α_1} und ϑ_{α_2}.

Man kann nun schon diese sich unmittelbar ergebenden Gleichungssysteme zu Grunde legen und aus ihnen Relationen zwischen den transformirten Thetafunctionen mit dem Argument 0 herstellen, indem man auf beiden Seiten jedes Glied nach Potenzen von v entwickelt, nach Potenzen von v ordnet und dann die Coefficienten gleich hoher Potenzen von v auf beiden Seiten einander gleich setzt. Die Anzahl der sich so ergebenden Relationen wird um so grösser sein, da ausser den zu eliminirenden unbekannten Grössen x nur noch die Unbekannten $\vartheta_\alpha''(0, \tau)$ und $\vartheta_\alpha''(0, \tau')$ auftreten, wo man α fest gleich 0, 2 oder 3 annehmen kann, denn man kann ja die zweiten und höheren Ableitungen aller Thetafunctionen durch die Thetafunctionen selbst und die zweite Ableitung einer einzigen der drei genannten Thetafunctionen ausdrücken.

Hierbei aber tritt der Umstand erschwerend ein, dass diese zweiten Ableitungen nicht nur linear auftreten, sondern auch die Potenzen derselben. Deshalb ist es besser, man legt den Betrachtungen diese Gleichungen in der Form zu Grunde, wie sie Herr Prof. Krause für den Fall I. in seiner Notiz, Acta mathematica 3. Pag. 95 unter (3) angiebt. Diese Gleichungen folgen unmittelbar aus den obigen durch den Zusammenhang der Thetafunctionen mit elliptischen Functionen und lauten für den Fall I. folgendermassen:

B.

I. 1) $$\vartheta_3^n \frac{\vartheta_0(v', \tau')}{\vartheta_0^n(v, \tau)} = x_1\vartheta_3^n + x_2\vartheta_3^{n-2}\vartheta_2^2 \mathrm{sn}^2(u, k) + \ldots$$
$$\ldots + x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_3\vartheta_2^{n-1}\mathrm{sn}^{n-1}(u, k).$$

2) $$\frac{O_2}{O_0}\vartheta_0^n \mathrm{cn}(u', c)\frac{\vartheta_0(v', \tau')}{\vartheta_0^n(v, \tau)}$$
$$= x_1\vartheta_2^n\mathrm{cn}^n(u, k) + x_2\vartheta_2^{n-2}\vartheta_3^2\mathrm{cn}^{n-2}(u, k)\mathrm{dn}^2(u, k) + \ldots$$
$$\ldots + x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_2\vartheta_3^{n-1}\mathrm{cn}(u, k)\mathrm{dn}^{n-1}(u, k)$$

3) $$\frac{O_3}{O_0}\vartheta_0^n \mathrm{dn}(u', c)\frac{\vartheta_0(v', \tau')}{\vartheta_0^n(v, \tau)}$$
$$= x_1\vartheta_3^n\mathrm{dn}^n(u, k) + x_2\vartheta_3^{n-2}\vartheta_2^2\mathrm{dn}^{n-2}(u, k)\mathrm{cn}^2(u, k) + \ldots$$
$$\ldots + x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_3\vartheta_2^{n-1}\mathrm{dn}(u, k)\mathrm{cn}^{n-1}(u, k)$$

$$4)\quad (-1)^{\frac{t-1}{2}}\frac{O_2}{O_3}\,\vartheta_3{}^n\,\mathrm{sn}\,(u'\ c)\,\frac{\vartheta_0(v',\tau')}{\vartheta_0{}^n(v,\tau)}$$
$$= x_1\vartheta_2{}^n\mathrm{sn}^n(u,k) + x_2\vartheta_2{}^{n-2}\vartheta_3{}^2\mathrm{sn}^{n-2}(u,\ k)$$
$$\ldots + x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_2\vartheta_3{}^{n-1}\mathrm{sn}(u,k)$$

wobei folgende Beziehungen stattfinden:

$$u = \pi\vartheta_3{}^2 v,\quad u' = \pi O_3{}^2 v' = tu\frac{O_3{}^2}{\vartheta_3{}^2}.\quad k = \frac{\vartheta_2{}^2}{\vartheta_3{}^2}.\quad c = \frac{O_2{}^2}{O_3{}^2}.$$

wenn man setzt

$$\vartheta_\alpha(0,\tau) = \vartheta_\alpha \quad \text{und} \quad \vartheta_\alpha(0,\tau') = O_\alpha.$$

Aehnliche, jedoch nicht so analoge Ausdrücke, dass man sie wie die Gleichungssysteme A. zusammenfassen kann, ergeben sich, wenn man A_{II} und A_{III} umformt. Der Kürze wegen gebe ich sie hier nicht an, zumal man sie sehr leicht aus den Gleichungssytemen A ableiten kann.

Um nun aus diesen Gleichungen Relationen zwischen den transformirten Thetafunctionen zu erhalten, muss man die elliptischen Functionen sn, cn, dn, sowie die Potenzen und Producte derselben nach Potenzen von u entwickeln. Es ist nun aber nach Königsberger, Elliptische Functionen II. Pag. 81 und 82, wenn man die Moduln und Complementarmoduln durch die Thetafunctionen mit dem Argument 0 ausdrückt:

$$\mathrm{sn}(u) = u - \frac{u^3}{3!}\frac{\vartheta_2{}^4+\vartheta_3{}^4}{\vartheta_3{}^4} + \frac{u^5}{5!}\frac{\vartheta_2{}^8+4\vartheta_2{}^4\vartheta_3{}^4+\vartheta_3{}^8}{\vartheta_3{}^8}$$
$$- \frac{u^7}{7!}\frac{\vartheta_2{}^{12}+135\vartheta_2{}^8\vartheta_3{}^4+135\vartheta_2{}^4\vartheta_3{}^8+\vartheta_3{}^{12}}{\vartheta_3{}^{12}} + \ldots$$

$$\mathrm{cn}(u) = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!}\frac{4\vartheta_2{}^4+\vartheta_3{}^4}{\vartheta_3{}^4} - \frac{u^6}{6!}\frac{16\vartheta_2{}^8+44\vartheta_2{}^4\vartheta_3{}^4+\vartheta_3{}^8}{\vartheta_3{}^8} + \ldots$$

$$\mathrm{dn}(u) = 1 - \frac{u^2}{2!}\frac{\vartheta_2{}^4}{\vartheta_3{}^4} + \frac{u^4}{4!}\frac{\vartheta_2{}^4}{\vartheta_3{}^4}\frac{4\vartheta_3{}^4+\vartheta_2{}^4}{\vartheta_3{}^4} - \frac{u^6}{6!}\frac{\vartheta_2{}^4}{\vartheta_3{}^4}\frac{\vartheta_2{}^8+44\vartheta_2{}^4\vartheta_3{}^4+16\vartheta_3{}^8}{\vartheta_3{}^8}$$
$$+ \ldots$$

$$\mathrm{sn}^2(u) = u^2 - \frac{2}{3!}u^4\frac{\vartheta_2{}^4+\vartheta_3{}^4}{\vartheta_3{}^4} + \frac{1}{3.5!}u^6\frac{16\vartheta_2{}^8+44\vartheta_2{}^4\vartheta_3{}^4+16\vartheta_3{}^8}{\vartheta_3{}^8} - \ldots$$

$$\mathrm{sn}^3(u) = u^3 - \frac{1}{2}u^5\frac{\vartheta_2{}^4+\vartheta_3{}^4}{\vartheta_3{}^4} + \frac{1}{5!}u^7\frac{13\vartheta_2{}^8+32\vartheta_2{}^4\vartheta_3{}^4+13\vartheta_3{}^8}{\vartheta_3{}^8} - \ldots$$

$$\mathrm{sn}^4(u) = u^4 - u^6\frac{4}{3!}\frac{\vartheta_2{}^4+\vartheta_3{}^4}{\vartheta_3{}^4} + \ldots$$

$$\mathrm{sn}^5(u) = u^5 - u^7 \frac{5}{3!} \frac{\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4}{\vartheta_3^4} + \ldots$$

. . . . . .

$$\mathrm{cn}^2(u) = 1 - u^2 + u^4 \frac{2}{3!} \frac{\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4}{\vartheta_3^4} - u^6 \frac{1}{3.5!} \frac{16\vartheta_2^8 + 104\vartheta_2^4\vartheta_3^4 + 16\vartheta_3^8}{\vartheta_3^8} + \ldots$$

$$\mathrm{cn}^3(u) = 1 - \frac{3}{2!}u^2 + u^4 \frac{3}{4!} \frac{4\vartheta_2^4 + 7\vartheta_3^4}{\vartheta_3^4} - u^6 \frac{1}{2.5!} \frac{16\vartheta_2^8 + 164\vartheta_2^4\vartheta_3^4 + 61\vartheta_3^8}{\vartheta_3^8} + \ldots$$

$$\mathrm{cn}^4(u) = 1 - \frac{4}{2!}u^2 + u^4 \frac{2}{3!} \frac{2\vartheta_2^4 + 5\vartheta_3^4}{\vartheta_3^4} - u^6 \frac{2}{3.5!} \frac{16\vartheta_2^8 + 224\vartheta_2^4\vartheta_3^4 + 136\vartheta_3^8}{\vartheta_3^8} + \ldots$$

$$\mathrm{cn}^5(u) = 1 - \frac{5}{2!}u^2 + u^4 \frac{1}{4!} \frac{20\vartheta_2^4 + 65\vartheta_3^4}{\vartheta_3^4} - u^6 \frac{1}{6!} \frac{80\vartheta_2^8 + 1420\vartheta_2^4\vartheta_3^4 + 1205\vartheta_3^8}{\vartheta_3^8} + \ldots$$

. . . . . .

$$\mathrm{dn}^2(u) = 1 - \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4}u^2 + u^4 \frac{2}{3!} \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} \frac{\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4}{\vartheta_3^4} - u^6 \frac{1}{3.5!} \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} \frac{16\vartheta_2^8 + 104\vartheta_2^4\vartheta_3^4 + 16\vartheta_3^8}{\vartheta_3^8} + \ldots$$

$$\mathrm{dn}^3(u) = 1 - \frac{3}{2!} \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4}u^2 + u^4 \frac{3\vartheta_2^4(7\vartheta_2^4 + 4\vartheta_3^4)}{4!\,\vartheta_3^4.\vartheta_3^4} - u^6 \frac{1}{2.5!} \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} \frac{61\vartheta_2^8 + 164\vartheta_2^4\vartheta_3^4 + 16\vartheta_3^8}{\vartheta_3^8} + \ldots$$

$$\mathrm{dn}^4(u) = 1 - \frac{4}{2!} \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4}u^2 + u^4 \frac{2}{3!} \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} \frac{5\vartheta_2^4 + 2\vartheta_3^4}{\vartheta_3^4} - u^6 \frac{2}{3.5!} \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} \frac{136\vartheta_2^8 + 244\vartheta_2^4\vartheta_3^4 + 16\vartheta_3^8}{\vartheta_3^8} + \ldots$$

$$\mathrm{dn}^5(u) = 1 - \frac{5}{2!} \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4}u^2 + u^4 \frac{1}{4!} \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} \frac{65\vartheta_2^4 + 20\vartheta_3^4}{\vartheta_3^4} - u^6 \frac{1}{6!} \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} \frac{1205\vartheta_2^8 + 1420\vartheta_2^4\vartheta_3^4 + 80\vartheta_3^8}{\vartheta_3^8} + \ldots$$

. . . . . .

Ich habe hier diese Entwicklungen und nicht die Jacobi'schen zu Grunde gelegt, weil sie sich in dieser Form besser für unsern Zweck eignen; und ferner habe ich die Potenzen aus den einfachen

berechnet und sie nicht aus den von Désiré André gegebenen allgemeinen Resultaten durch Specialisirung abgeleitet, da ersteres für die bisher von mir behandelten speciellen Fälle viel leichter ist.

Ferner sind nun noch für die speciellen Fälle die Producte je zweier dieser Ausdrücke zu bilden und zwar die Producte, für welche die Summe der Exponenten respective $= 3, 5 \ldots 2q+1$ sind. Der Kürze halber will ich jedoch auch diese hier nicht angeben, nur das möchte ich bemerken, dass die Producte $\mathrm{cn}^p(u)\,\mathrm{dn}^r(u)$ den Producten $\mathrm{cn}^r(u)\,\mathrm{dn}^p(u)$ ganz analog sind, dass man die letzteren unmittelbar bekommt, wenn man bei den Ausdrücken für die ersteren die Indices 2 und 3 in den Zählern vertauscht.

Endlich ist nun noch der Quotient $\frac{\vartheta_\alpha(v', \tau')}{\vartheta_\alpha{}^n(v, \tau)}$ zu entwickeln. Da $v' = \frac{tu}{\pi\vartheta_3{}^2}$ und $v = \frac{u}{\pi\vartheta_3{}^2}$ ist, so kann man diesen Quotient als eine Function von u ansehen, und er wird entwickelt die Form annehmen:

$$\frac{\vartheta_\alpha(v', \tau')}{\vartheta_\alpha{}^n(v, \tau)} = f(u) = y_0 + y_1 u + y_2 u^2 + y_3 u^3 + \ldots$$

Es lässt sich jedoch nachweisen und stellt sich auch bei den weiteren Untersuchungen heraus, dass alle $y_{2m+1} = 0$ sind, man erhält somit für $f(u)$ endgültig die Form:

$$f(u) = y_0 + y_2 u^2 + y_4 u^4 + \ldots$$

Die Grössen y enthalten, wie man unmittelbar erkennt, wieder die Unbekannten $\vartheta_\alpha{}''$ und $O_\alpha{}''$ und zwar in der Form $t^2 \frac{O_\alpha{}''}{O_\alpha} - n \frac{\vartheta_\alpha{}''}{\vartheta_\alpha}$ und der Potenzen von diesem Ausdruck. Wir betrachten deshalb bei der Aufstellung der Gauss'schen Relationen die y als Unbekannte und haben es so, wenn wir dann die Coefficienten gleich hoher Potenzen von u auf beiden Seiten einander gleich setzen, mit Gleichungen zu tun, in denen die Unbekannten x und y nur linear auftreten, was die Elimination derselben wesentlich erleichtert.

Bei den allgemeinen Betrachtungen müssen wir die Grössen y jedoch berechnen, da dort nicht so viele Gleichungen vorliegen, um auch die y zu eliminiren.

Hierbei ist es dann wesentlich, dass man die verschiedenen Ableitungen der Thetafunctionen mit dem Argument 0 durch die Thetafunctionen mit dem Argument 0 selbst und die zweite Ableitung einer einzigen ausdrücken kann. Ich will deshalb hier die Beziehungen zwischen diesen Grössen zusammenstellen, wie sie sich aus der Ent-

wicklung der Gleichungen der Jacobi'schen Tabelle C. (Jacobi's gesammelte Werke I. Pag. 510) ergeben:

Nach der hier gewählten Bezeichnungsweise ist

$$\vartheta_1' = \pi\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3$$

$$\vartheta_3{}^3\vartheta_3'' = \vartheta_0{}^3\vartheta_0'' + \vartheta_2{}^3\vartheta_2''$$

$$\vartheta_3\vartheta_0'' = \vartheta_0\vartheta_3'' + \pi^2\vartheta_0\vartheta_3\vartheta_2{}^4$$

$$\vartheta_3\vartheta_2'' = \vartheta_2\vartheta_3'' - \pi^2\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_0{}^4$$

$$\vartheta_1''' = 3\pi\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3'' - \pi^3\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3(\vartheta_0{}^4 - \vartheta_2{}^4) = 3\pi\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_0'' - \pi^3\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3(\vartheta_2{}^4 + \vartheta_3{}^4) = \ldots$$

$$\vartheta_0{}^{IV} = 3\frac{\vartheta_0''^2}{\vartheta_0} - 2\pi^4\vartheta_0\vartheta_2{}^4\vartheta_3{}^4 = \ldots$$

$$\vartheta_2{}^{IV} = 3\frac{\vartheta_0''^2}{\vartheta_2} - 2\pi^4.\vartheta_0{}^4\vartheta_2\vartheta_3{}^4 = 3\frac{\vartheta_2}{\vartheta_0{}^2}\vartheta_0''^2 - 6\pi^2\frac{\vartheta_2}{\vartheta_0}\vartheta_3{}^4\vartheta_0'' + \pi^4\vartheta_2\vartheta_3{}^4(3\vartheta_3{}^4 - 2\vartheta_0{}^4) = \ldots$$

$$\vartheta_3{}^{IV} = 3\frac{\vartheta_3''^2}{\vartheta_3} + 2\pi^4\vartheta_0{}^4\vartheta_2{}^4\vartheta_3 = 3\frac{\vartheta_3}{\vartheta_0{}^2}\vartheta_0''^2 - 6\pi^2\frac{\vartheta_3}{\vartheta_0}\vartheta_2{}^4\vartheta_0'' + \pi^4\vartheta_2{}^4\vartheta_3(3\vartheta_2{}^4 + 2\vartheta_0{}^4) = \ldots$$

$$\vartheta_1{}^V = 15\pi\frac{\vartheta_2\vartheta_3}{\vartheta_0}\vartheta_0''^2 - 10\pi^3\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_0''(\vartheta_2{}^4 + \vartheta_3{}^4) + \pi^5\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3(\vartheta_2{}^8 + 4\vartheta_2{}^4\vartheta_3{}^4 + \vartheta_3{}^8) = \ldots$$

. . . . . .

§ 2.

Setzt man in den Gleichungen B_I für die Potenzen und Producte der elliptischen Functionen und für $f(u)$ die Werte ein, so nehmen dieselben, wenn man bis zur fünften Potenz von u fortschreitet, folgende Gestalt an:

1) $$\vartheta_3{}^n(y_0 + y_2u^2 + y_4u^4 + \ldots) = x_1\vartheta_3{}^n + x_2\vartheta_3{}^{n-2}\vartheta_2{}^2\left(u^2 - \frac{u^4}{3}\frac{\vartheta_2{}^4 + \vartheta_3{}^4}{\vartheta_3{}^4} + \ldots\right) + x_3\vartheta_3{}^{n-4}\vartheta_2{}^4(u^4 - \ldots) + \ldots$$

2) $$\frac{O_2}{O_0}\vartheta_0{}^n(y_0 - \ldots) = x_1\vartheta_2{}^n(1 - \ldots) + x_2\vartheta_2{}^{n-2}\vartheta_3{}^2(1 - \ldots) + \ldots$$
$$\ldots + x_{\frac{n-1}{2}}\vartheta_2{}^3\vartheta_3{}^{n-3}(1 - \ldots) + x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_2\vartheta_3{}^{n-1}(1 - \ldots)$$

3) $$\frac{O_3}{O_0}\vartheta_0{}^n(y_0 - \ldots) = x_1\vartheta_3{}^n(1 - \ldots) + x_2\vartheta_3{}^{n-2}\vartheta_2{}^2(1 - \ldots) + \ldots$$
$$\ldots + x_{\frac{n-1}{2}}\vartheta_3{}^3\vartheta_2{}^{n-3}(1 - \ldots) + x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_3\vartheta_2{}^{n-1}(1 - \ldots)$$

4) $$(-1)^{\frac{t-1}{2}}\frac{O_2}{O_3}\vartheta_3{}^n\left\{tu\,y_0\frac{O_3{}^2}{\vartheta_3{}^2} - \frac{u^3}{3!}\left(y_0t^3\frac{O_3{}^2}{\vartheta_3{}^2}\,\frac{O_2{}^4 + O_3{}^4}{\vartheta_3{}^4} - 6ty_2\frac{O_3{}^2}{\vartheta_3{}^2}\right)\right.$$
$$+\frac{u^5}{5!}\left(y_0t^5\frac{O_3{}^2}{\vartheta_3{}^2}\,\frac{O_2{}^8 + 4O_2{}^4O_3{}^4 + O_3{}^8}{\vartheta_3{}^8}\right.$$
$$\left.\left.-20t^3y_2\frac{O_3{}^2}{\vartheta_3{}^2}\,\frac{O_2{}^4 + O_3{}^4}{\vartheta_3{}^4} + 120t\,y_4\frac{O_3{}^2}{\vartheta_3{}^2}\right) - \ldots\right\} =$$
$$x_1\vartheta_2{}^n(u^n - \ldots) + \ldots x_{\frac{n-3}{2}}\vartheta_2{}^5\vartheta_3{}^{n-5}(u^5 - \ldots)$$
$$+x_{\frac{n-1}{2}}\vartheta_2{}^3\vartheta_3{}^{n-3}\left(u^3 - \frac{u^5}{2}\,\frac{\vartheta_2{}^4 + \vartheta_3{}^4}{\vartheta_3{}^4} + \ldots\right)$$
$$+x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_2\vartheta_3{}^{n-1}\left(u - \frac{u^3}{3!}\,\frac{\vartheta_2{}^4 + \vartheta_3{}^4}{\vartheta_3{}^4} + \frac{u^5}{5!}\,\frac{\vartheta_2{}^8 + 4\vartheta_2{}^4\vartheta_3{}^4 + \vartheta_3{}^8}{\vartheta_3{}^8} - \ldots\right).$$

Hieraus ergeben sich durch Vergleichung gleich hoher Potenzen von u folgende Gleichungen:

Aus 1)

a) $y_0 = x_1$

b) $\vartheta_3{}^2y_2 = \vartheta_2{}^2x_2$

c) $3\vartheta_3{}^6y_4 = -x_2\vartheta_2{}^2(\vartheta_2{}^4 + \vartheta_3{}^4) + 3x_3\vartheta_2{}^4\vartheta_3{}^2$

. . . . . .

Aus 2)

a) $$\frac{O_2}{O_0}\vartheta_0{}^n y_0 = x_1\vartheta_2{}^n + x_2\vartheta_2{}^{n-2}\vartheta_3{}^2 + \ldots$$
$$\ldots + x_{\frac{n-1}{2}}\vartheta_2{}^3\vartheta_3{}^{n-3} + x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_2\vartheta_3{}^{n-1}$$

. . . . . .

Aus 3)

a) $$\frac{O_3}{O_0}\vartheta_0{}^n y_0 = x_1\vartheta_3{}^n + x_2\vartheta_3{}^{n-2}\vartheta_2{}^2 + \ldots$$
$$\ldots + x_{\frac{n-1}{2}}\vartheta_3{}^3\vartheta_2{}^{n-3} + x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_3\vartheta_2{}^{n-1}$$

. . . . . .

Aus 4)

a) $$(-1)^{\frac{t-1}{2}}tO_2O_3y_0 = \vartheta_2\vartheta_3x_{\frac{n+1}{2}}$$

b) $$(-1)^{\frac{t-1}{2}}t(y_0t^2O_2O_3(O_2{}^4 + O_3{}^4) - 6y_2\vartheta_3{}^4O_2O_3)$$
$$= x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_2\vartheta_3(\vartheta_2{}^4 + \vartheta_3{}^4) - 6x_{\frac{n-1}{2}}\vartheta_2{}^3\vartheta_3{}^3$$

$$\text{c)}\quad (-1)^{\frac{t-1}{2}} t O_2 O_3 \{t^4 y_0 (O_2^8 + 4 O_2^4 O_3^4 + O_3^8)$$
$$-20 t^2 y_2 \vartheta_3^4 (O_2^4 + O_3^4) + 120 y_4 \vartheta_3^8\}$$
$$= \vartheta_2 \vartheta_3 \{x_{\frac{n+1}{2}} (\vartheta_2^8 + 4 \vartheta_2^4 \vartheta_3^4 + \vartheta_3^8)$$
$$-60 x_{\frac{n-1}{2}} \vartheta_2^2 \vartheta_3^2 (\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4) + 120 x_{\frac{n-3}{2}} \vartheta_2^4 \vartheta_3^4\}$$

Man sieht nun unmittelbar, dass diese Gleichungen nicht hinreichen, um alle y und x zu eliminiren, zumal man die sich aus 2) und 3) ergebenden allgemein garnicht benutzen kann, denn in denselben treten immer alle Grössen x von x_1 bis $x_{\frac{n+1}{2}}$ auf. Wohl aber können wir mit Hülfe aller sich aus 1) und 4) ergebenden Gleichungen nach einander alle Grössen x durch Thetafunctionen mit dem Argument 0 und die Grössen y ausdrücken, und da die y sich durch die Thetafunctionen und jenen die zweite Ableitung einer derselben für das Argument 0 enthaltenden Ausdruck, darstellen lassen, so wird man jede der Grössen x durch die genannten Grössen ausdrücken können. Da dieses später für die allgemeinen Betrachtungen bei den Teilwerten der Thetafunctionen benutzt wird, so will ich es gleich hier für die Grössen x_1, x_2, x_3, $x_{\frac{n+1}{1}}$, $x_{\frac{n-1}{2}}$ und $x_{\frac{n-3}{2}}$ durchführen:

Aus dem Taylor'schen und dem Leibnitz'schen Satz ergeben sich für die y in der Entwicklung von $\frac{\vartheta_0(v', \tau')}{\vartheta_0{}^n(v, \tau)}$, wenn man noch die Beziehungen zwischen den Grössen u und v berücksichtigt, folgende Werte:

$$y_0 = \frac{O_0}{\vartheta_0{}^n}$$

$$y_2 = \frac{1}{2!\,\pi^2} \frac{O_0}{\vartheta_3{}^4 \vartheta_0{}^n} \left(t^2 \frac{O_0''}{O_0} - n \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} \right)$$

$$y_4 = \frac{1}{4!\,\pi^4} \frac{O_0}{\vartheta_3{}^8 \vartheta_0{}^n} \left\{ 3 \left(t^2 \frac{O_0''}{O_0} - n \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} \right)^2 - 2\pi^4 (t^4 O_2^4 O_3^4 - n \vartheta_2^4 \vartheta_3^4) \right\}$$

. . . . . .

Analoge Werte erhält man in den beiden andern Fällen für die y.

Setzt man diese Werte in die obigen Gleichungen ein, so ergeben sich für die Coefficienten folgende Ausdrücke:

I. für $\alpha_1 = 0$

$$x_1 = \frac{O_0}{\vartheta_0{}^n}$$

$$x_{\frac{n+1}{2}} = (-1)^{\frac{t-1}{2}} t \frac{O_0 O_2 O_3}{\vartheta_0{}^n \vartheta_2 \vartheta_3}$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \frac{O_0}{\pi^2 \vartheta_2{}^2 \vartheta_3{}^2 \vartheta_0{}^n} \left(t^2 \frac{O_0''}{O_0} - n \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} \right)$$

$$x_{\frac{n-1}{2}} = (-1)^{\frac{t-1}{2}} \frac{t O_0 O_2 O_3}{6 \vartheta_0{}^n \vartheta_2{}^3 \vartheta_3{}^3} \left\{ \frac{3}{\pi^2} \left(t^2 \frac{O_0''}{O_0} - n \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} \right) - (t^2 (O_2{}^4 + O_3{}^4) - (\vartheta_2{}^4 + \vartheta_3{}^4)) \right\}$$

$$x_3 = \frac{O_0}{\vartheta_0{}^n \vartheta_2{}^4 \vartheta_3{}^4} \left\{ \frac{1}{8\pi^4} \left(t^2 \frac{O_0''}{O_0} - n \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} \right)^2 + \frac{\vartheta_2{}^4 + \vartheta_3{}^4}{6\pi^2} \left(t^2 \frac{O_0''}{O_0} - n \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} \right) - \frac{1}{12} (t^4 O_2{}^4 O_3{}^4 - n \vartheta_2{}^4 \vartheta_3{}^4) \right\}$$

$$x_{\frac{n-3}{2}} = (-1)^{\frac{t-1}{2}} \frac{t O_0 O_2 O_3}{\vartheta_0{}^n \vartheta_2{}^5 \vartheta_3{}^5} \left\{ \frac{1}{8\pi^4} \left(t^2 \frac{O_0''}{O_0} - n \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} \right)^2 - \frac{t^2 (O_2{}^4 + O_3{}^4) - 3(\vartheta_2{}^4 + \vartheta_3{}^4)}{12\pi^2} \left(t^2 \frac{O_0''}{O_0} - n \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} \right) - \frac{1}{12} (\vartheta_2{}^4 + \vartheta_3{}^4) [t^2 (O_2{}^4 + O_3{}^4) - (\vartheta_2{}^4 + \vartheta_3{}^4)] - \frac{1}{120} [t^4 (O_2{}^8 + 4 O_2{}^4 O_3{}^4 + O_3{}^8) - (\vartheta_2{}^8 + (10n - 6) \vartheta_2{}^4 \vartheta_3{}^4 + \vartheta_3{}^8)] \right\}$$

II. für $\alpha_1 = 2$

$$x_1{}' = \frac{O_2}{\vartheta_2{}^n}$$

$$x_{\frac{n+1}{2}}{}' = (-1)^{\frac{t-1}{2}} t \frac{O_0 O_2 O_3}{\vartheta_0 \vartheta_2{}^n \vartheta_3}$$

$$x_2{}' = \frac{1}{2} \frac{O_2}{\pi^2 \vartheta_0{}^2 \vartheta_2{}^n \vartheta_3{}^2} \left(t^2 \frac{O_2''}{O_2} - n \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} \right)$$

$$x_{\frac{n-1}{2}}{}' = (-1)^{\frac{t-1}{2}} \frac{t O_0 O_2 O_3}{6 \vartheta_0{}^3 \vartheta_2{}^n \vartheta_3{}^3} \left\{ \frac{3}{\pi^2} \left(t^2 \frac{O_2''}{O_2} - n \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} \right) + (t^2 (O_0{}^4 + O_3{}^4) - (\vartheta_0{}^4 + \vartheta_3{}^4)) \right\}$$

$$x_3' = \frac{O_2}{\vartheta_0^4 \vartheta_2^n \vartheta_3^4} \left\{ \frac{1}{8\pi^4} \left(t^2 \frac{O_2''}{O_2} - n \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} \right)^2 \right.$$

$$\left. - \frac{\vartheta_0^4 + \vartheta_3^4}{6\pi^2} \left(t^2 \frac{O_2''}{O_2} - n \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} \right) - \frac{1}{12} (t^4 O_0^4 O_3^4 - n \vartheta_0^4 \vartheta_3^4) \right\}$$

$$x_{\frac{n-3}{2}}' = (-1)^{\frac{t-1}{2}} \frac{t O_0 O_2 O_3}{\vartheta_0^5 \vartheta_2^n \vartheta_3^5} \left\{ \frac{1}{8\pi^4} \left(t^2 \frac{O_2''}{O_2} - n \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} \right)^2 \right.$$

$$+ \frac{t^2(O_0^4 + O_3^4) - 3(\vartheta_0^4 + \vartheta_3^4)}{12\pi^2} \left(t^2 \frac{O_2''}{O_2} - n \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} \right)$$

$$- \frac{1}{12} (\vartheta_0^4 + \vartheta_3^4) [t^2(O_0^4 + O_3^4) - (\vartheta_0^4 + \vartheta_3^4)]$$

$$- \frac{1}{120} [t^4(O_0^8 + 4 O_0^4 O_3^4 + O_3^8)$$

$$\left. - (\vartheta_0^8 + (10n - 6)\vartheta_0^4 \vartheta_3^4 + \vartheta_3^8)] \right\}$$

III. für $\alpha_2 = 3$

$$x_1'' = \frac{O_3}{\vartheta_3^n}$$

$$x_{\frac{n+1}{2}}'' = (-1)^{\frac{t-1}{2} t} \frac{O_0 O_2 O_3}{\vartheta_0 \vartheta_2 \vartheta_{3\,n}}$$

$$x_2'' = -\frac{1}{2} \frac{O_3}{\pi^2 \vartheta_0^2 \vartheta_2^2 \vartheta_3^n} \left(t^2 \frac{O_3''}{O_3} - n \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} \right)$$

$$x_{\frac{n-1}{2}}'' = (-1)^{\frac{t-1}{2}} \frac{t O_0 O_2 O_3}{6 \vartheta_0^3 \vartheta_2^3 \vartheta_3^n} \left\{ \frac{3}{\pi^2} \left(t^2 \frac{O_3''}{O_3} - n \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} \right) \right.$$

$$\left. - (t^2(O_0^4 - O_2^4) - (\vartheta_0^4 - \vartheta_2^4)) \right\}$$

$$x_3'' = \frac{O_3}{\vartheta_0^4 \vartheta_2^4 \vartheta_3^n} \left\{ \frac{1}{8\pi^4} \left(t^2 \frac{O_3''}{O_3} - n \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} \right)^2 \right.$$

$$\left. + \frac{\vartheta_0^4 - \vartheta_2^4}{6\pi^2} \left(t^2 \frac{O_3''}{O_3} - n \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} \right) + \frac{1}{12} (t^4 O_0^4 O_2^4 - n \vartheta_0^4 \vartheta_2^4) \right\}$$

$$x_{\frac{n-3}{2}}'' = (-1)^{\frac{t-1}{2}} \frac{t O_0 O_2 O_3}{\vartheta_0^5 \vartheta_2^5 \vartheta_3^n} \left\{ \frac{1}{8\pi^4} \left(t^2 \frac{O_3''}{O_3} - n \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} \right)^2 \right.$$

$$- \frac{t^2(O_0^4 - O_2^4) - 3(\vartheta_0^4 - \vartheta_2^4)}{12\pi^2} \left(t^2 \frac{O_3''}{O_3} - n \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} \right)$$

$$- \frac{1}{12} (\vartheta_0^4 - \vartheta_2^4) [t^2(O_0^4 - O_2^4) - (\vartheta_0^4 - \vartheta_2^4)]$$

$$- \frac{1}{120} [t^4(O_0^8 - 4 O_0^4 O_2^4 + O_2^8)$$

$$\left. - (\vartheta_0^8 - (10n - 6)\vartheta_0^4 \vartheta_2^4 + \vartheta_2^8)] \right\}.$$

§ 3.

In dem speciellen Falle $n = 3$ können wir uns auf eins der drei Gleichungssysteme B. beschränken z. B. auf B_I, denn man bekommt durch alle drei dieselben Gleichungen. Das System B_I nimmt aber für $n = 3$ folgende Form an:

$$1)\quad \vartheta_3{}^3 \frac{\vartheta_0(v', \tau')}{\vartheta_0{}^3(v, \tau)} = x_1 \vartheta_3{}^3 + x_2 \vartheta_3 \vartheta_2{}^2 \operatorname{sn}^2(u, k)$$

$$2)\quad \frac{O_2}{O_0} \vartheta_0{}^3 \operatorname{cn}(u', c) \frac{\vartheta_0(v', \tau')}{\vartheta_0{}^3(v, \tau)} = x_1 \vartheta_2{}^3 \operatorname{cn}^3(u, k) + x_2 \vartheta_2 \vartheta_3{}^2 \operatorname{cn}(u, k) \operatorname{dn}^2(u, k)$$

$$3)\quad \frac{O_3}{O_0} \vartheta_0{}^3 \operatorname{dn}(u', c) \frac{\vartheta_0(v', \tau')}{\vartheta_0{}^3(v, \tau)} = x_1 \vartheta_3{}^3 \operatorname{dn}^3(u, k) + x_2 \vartheta_3 \vartheta_2{}^2 \operatorname{dn}(u, k) \operatorname{cn}^2(u, k)$$

$$4)\quad (-1)^{\frac{t-1}{2}} \frac{O_2}{O_3} \vartheta_3{}^3 \operatorname{sn}(u', c) \frac{\vartheta_0(v', \tau')}{\vartheta_0{}^3(v, \tau)} = x_1 \vartheta_2{}^3 \operatorname{sn}^3(u, k) + x_2 \vartheta_2 \vartheta_3{}^2 \operatorname{sn}(u, k)$$

Entwickelt man hier nun in der angegebenen Weise und setzt dann die Coefficienten gleich hoher Potenznn von u auf beiden Seiten einander gleich, so erhält man, wenn man in den Entwicklungen bis zur fünften Potenz fortschreitet, folgende Gleichungen:

$$(1)\quad y_0 = x_1$$

$$(2)\quad y_0 \vartheta_0{}^3 O_2 = x_1 \vartheta_2{}^3 O_0 + x_2 \vartheta_2 \vartheta_3{}^2 O_0$$

$$(3)\quad y_0 \vartheta_0{}^3 O_3 = x_1 \vartheta_3{}^3 O_0 + x_2 \vartheta_2{}^2 \vartheta_3 O_0$$

$$(4)\quad (-1)^{\frac{t-1}{2}} y_0 t O_2 O_3 = x_2 \vartheta_2 \vartheta_3$$

$$(5)\quad y_2 \vartheta_3{}^2 = x_2 \vartheta_2{}^2$$

$$(6)\quad t^2 y_0 \vartheta_0{}^3 O_2 O_3{}^4 - 2 y_2 \vartheta_0{}^3 \vartheta_3{}^4 O_2 = 3 x_1 \vartheta_2{}^3 \vartheta_3{}^4 O_0 + x_2 \vartheta_2 \vartheta_3{}^2 O_0 (2 \vartheta_2{}^4 + \vartheta_3{}^4)$$

$$(7)\quad t^2 y_0 \vartheta_0{}^3 O_2{}^4 O_3 - 2 y_2 \vartheta_0{}^3 \vartheta_3{}^4 O_3 = 3 x_1 \vartheta_2{}^4 \vartheta_3{}^3 O_0 + x_2 \vartheta_2{}^2 \vartheta_3 O_0 (\vartheta_2{}^4 + 2 \vartheta_3{}^4)$$

$$(8)\quad (-1)^{\frac{t-1}{2}} t O_2 O_3 \{ - t^2 y_0 (O_2{}^4 + O_3{}^4) + 6 y_2 \vartheta_3{}^4 \} = 6 x_1 \vartheta_2{}^3 \vartheta_3{}^3 - x_2 \vartheta_2 \vartheta_3 (\vartheta_2{}^4 + \vartheta_3{}^4)$$

$$(9)\quad 3 y_4 \vartheta_3{}^6 = - x_2 \vartheta_2{}^2 (\vartheta_2{}^4 + \vartheta_3{}^4)$$

$$(10)\; t^4 y_0 \vartheta_2 O O_0^{3\,3\,4}(4O_2^4+O_3^4)-t^2.12y_2\vartheta_0^3\vartheta_3^4 O_2 O_3^4+24y_4\vartheta_0^3\vartheta_3^8 O_2$$
$$= 3x_1\vartheta_2^3\vartheta_3^4 O_0(4\vartheta_2^4+7\vartheta_3^4)+x_2\vartheta_2\vartheta_3^2 O_0(8\vartheta_2^8+24\vartheta_2^4\vartheta_3^4+\vartheta_3^8)$$

$$(11)\quad t^4 y_0\vartheta_0^3 O_2^4 O_3(O_2^4+4O_3^4)-t^2.12y_2\vartheta_0^3\vartheta_3^4 O_2^4 O_3+24y_4\vartheta_0^3\vartheta_3^8 O_3$$
$$= 3x_1\vartheta_2^4\vartheta_3^3 O_0(7\vartheta_2^4+4\vartheta_3^4)+x_2\vartheta_2^2\vartheta_3 O_0(\vartheta_2^8+24\vartheta_2^4\vartheta_3^4+8\vartheta_3^8)$$

$$(12)\quad (-1)^{\frac{t-1}{2}} t O_2 O_3\{t^4 y_0(O_2^8+4O_2^4O_3^4+O_3^8)$$
$$-20t^2y_2\vartheta_3^4(O_2^4+O_3^4)+120y_4\vartheta_3^8\} = -x_1 60\vartheta_2^3\vartheta_3^3(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)$$
$$+x_2\vartheta_2\vartheta_3(\vartheta_2^8+4\vartheta_2^4\vartheta_3^4+\vartheta_3^8).$$

Diese 12 Formeln, die man ja noch beliebig vermehren kann, wenn man in den Entwicklungen weiter geht, sind eine ergiebige Quelle für Relationen zwischen den transformirten Thetafunctionen $O_\alpha = \vartheta_\alpha(0,\tau')$ und $\vartheta_\alpha = \vartheta_\alpha(0,\tau)$. Combinirt man sie nach und nach mit einander, wie es die Klammern vorn angeben, so erhält man folgende Relationen:

(1, 2, 3) I $\quad \vartheta_3 O_3 = \vartheta_0 O_0 + \vartheta_2 O_2$

(1, 2, 4) II $\quad \dfrac{\vartheta_0^3}{O_0} - \dfrac{\vartheta_2^3}{O_2} = (-1)^{\frac{t-1}{2}} t\vartheta_3 O_3$

(1, 3. 4) III $\quad \dfrac{\vartheta_0^3}{O_0} - \dfrac{\vartheta_3^3}{O_3} = (-1)^{\frac{t-1}{2}} t\vartheta_2 O_2$

(2, 3, 4) IV $\quad \dfrac{\vartheta_3^3}{O_3} - \dfrac{\vartheta_2^3}{O_2} = (-1)^{\frac{t-1}{2}} t\vartheta_0 O_0$

(1, 2, 5, 6) V $\quad t^2 O_3^4 - \vartheta_3^4 = 2\dfrac{\vartheta_0\vartheta_2}{O_0 O_2}(\vartheta_2^2 O_0^2 + \vartheta_0^2 O_2^2)$

(1, 3, 5, 7) VI $\quad t^2 O_2^4 - \vartheta_2^4 = 2\dfrac{\vartheta_0\vartheta_3}{O_0 O_3}(\vartheta_0^2 O_3^2 - \vartheta_3^2 O_0^2)$

(V—VI) VII $\quad t^2 O_0^4 + \vartheta_0^4 = 2\vartheta_0 O_0\left(\dfrac{\vartheta_2^3}{O_2}+\dfrac{\vartheta_3^3}{O_3}\right)$

(1, 5, 6, 4) VIII $\quad t^2 O_3^4 - \vartheta_3^4 = 2\vartheta_2\vartheta_3\dfrac{O_3}{O_2}((-1)^{\frac{t-1}{2}} t O_2^2 + \vartheta_2^2)$

(1, 5, 7, 4) IX $\quad t^2 O_2^4 - \vartheta_2^4 = 2\vartheta_2\vartheta_3\dfrac{O_2}{O_3}((-1)^{\frac{t-1}{2}} t O_3^2 + \vartheta_3^2)$

(VIII—IX) X $\quad t^2 O_0^4 - \vartheta_0^4 = 2\dfrac{\vartheta_2\vartheta_3}{O_2 O_3}(\vartheta_2^2 O_3^2 - \vartheta_3^2 O_2^2)$

(1, 2, 5, 7) XI $\quad t^2 O_2^4 + \vartheta_2^4 = 2\vartheta_2 O_2\left(\dfrac{\vartheta_0^3}{O_0}+\dfrac{\vartheta_3^3}{O_3}\right)$

(1, 3, 5, 6) XII $t^2O_3^4+\vartheta_3^4=2\vartheta_3O_3\left(\frac{\vartheta_0^3}{O_0}+\frac{\vartheta_2^3}{O_2}\right)$

(1, 4, 6, 7) XIII $tO_2O_3\{-(-1)^{\frac{t-1}{2}}\vartheta_3^4+t\vartheta_3^2O_3^2-t\vartheta_2\vartheta_3O_2O_3+t\vartheta_2^2O_2^2$
$-(-1)^{\frac{t-1}{2}}\vartheta_2^4\}=3\vartheta_2^3\vartheta_3^3$

(1, 2, 6, 7) XIV $t^2\vartheta_0^3O_0^4O_2O_3=3\vartheta_2^3\vartheta_3^3\vartheta_0O_0^2$
$+\frac{\vartheta_0^4O_0O_2-\vartheta_0\vartheta_2^3O_0^2}{\vartheta_3}(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4-(-1)^{\frac{t-1}{2}}t\vartheta_2\vartheta_3O_2O_3)$

(1, 3, 6, 7) XV $t^2\vartheta_0^3O_0^4O_2O_3=3\vartheta_2^3\vartheta_3^3\vartheta_0O_0^2$
$+\frac{\vartheta_0^4O_0O_3-\vartheta_0\vartheta_3^3O_0^2}{\vartheta_2}(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4-(-1)^{\frac{t-1}{2}}t\vartheta_2\vartheta_3O_2O_3)$

1, 5, 6, 7) XVI $3\vartheta_0\vartheta_2^2\vartheta_3^2O_0(2t^2O_2^2O_3^2+3\vartheta_2^2\vartheta_3^2)$
$=t^2\vartheta_2O_2O_3^4(\vartheta_2^4+4\vartheta_3^4)-t^2\vartheta_3O_2^4O_3(4\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)$

(1, 4, 5, 8) XVII $(-1)^{\frac{t-1}{2}}tO_2O_3\{t^2(O_2^4+O_3^4)-(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)\}$
$=6\vartheta_2\vartheta_3(t^2O_2^2O_3^2-\vartheta_2^2\vartheta_3^2)$

(1, 2, 5, 8) XVIII $-(-1)^{\frac{t-1}{2}}t^3O_2O_3(O_2^4+O_3^4)$
$+6(-1)^{\frac{t-1}{2}}t\vartheta_0^3\vartheta_2\frac{O_2^2O_3}{O_0}-6(-1)^{\frac{t-1}{2}}t\vartheta_2^4O_2O_3$
$=6\vartheta_2^3\vartheta_3^3-(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)\left(\frac{\vartheta_0^3O_2}{\vartheta_3O_0}-\frac{\vartheta_2^3}{\vartheta_3}\right)$

(1, 3, 5, 8) XIX $-(-1)^{\frac{t-1}{2}}t^3O_2O_3(O_2^4+O_3^4)$
$+6(-1)^{\frac{t-1}{2}}t\vartheta_0^3\vartheta_3\frac{O_2O_3^2}{O_0}-6(-1)^{\frac{t-1}{2}}t\vartheta_3^4O_2O_3$
$=6\vartheta_2^3\vartheta_3^3-(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)\left(\frac{\vartheta_0^3O_3}{\vartheta_2O_0}-\frac{\vartheta_3^3}{\vartheta_2}\right)$

(1, 4, 6, 8) XX $-(-1)^{\frac{t-1}{2}}2t^3O_3^4+(-1)^{\frac{t-1}{2}}t^3O_2^4$
$=-(-1)^{\frac{t-1}{2}}9t\frac{\vartheta_2^3}{\vartheta_0^3}\frac{O_0}{O_2}\vartheta_3^4-6\frac{\vartheta_2^3\vartheta_3^3}{O_2O_3}$
$-3t^2\frac{\vartheta_3O_0O_3}{\vartheta_0^3}(2\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)+(-1)^{\frac{t-1}{2}}t(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)$

(1, 4, 7, 8) XXI $-(-1)^{\frac{t-1}{2}} 2t^3 O_2^4 + (-1)^{\frac{t-1}{2}} t^3 O_3^4$

$$= -(-1)^{\frac{t-1}{2}} 9t \frac{\vartheta_3^3}{\vartheta_0^3} \frac{O_0}{O_3} \vartheta_2^4 - 6 \frac{\vartheta_2^3 \vartheta_3^3}{O_2 O_3}$$

$$-3t^2 \frac{\vartheta_2 O_0 O_2}{\vartheta_0^3} (\vartheta_2^4 + 2\vartheta_3^4) + (-1)^{\frac{t-1}{2}} t(\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)$$

(1, 5, 6, 8) XXII $(-1)^{\frac{t-1}{2}} 2t^3 \vartheta_0^3 \vartheta_2 \vartheta_3 O_2^6 O_3 + (-1)^{\frac{t-1}{2}} 2t^3 \vartheta_2^4 \vartheta_3 O_0 O_2^5 O_3$

$$+(-1)^{\frac{t-1}{2}} 2t^3 \vartheta_2^4 \vartheta_3 O_0 O_2 O_3^5 + (-1)^{\frac{t-1}{2}} t^3 \vartheta_3^5 O_0 O_2^5 O_3$$

$$+(-1)^{\frac{t-1}{2}} t^3 \vartheta_3^5 O_0 O_2 O_3^5 + 30 \vartheta_0^3 \vartheta_2^4 \vartheta_3^4 O_2 - 3\vartheta_2^7 \vartheta_3^4 O_0$$

$$+9\vartheta_2^3 \vartheta_3^8 O_0 = (-1)^{\frac{t-1}{2}} 4t^3 \vartheta_0^3 \vartheta_2 \vartheta_3 O_2^2 O_3^5$$

$$+t^2 \vartheta_0^3 O_2 O_3^4 (\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)$$

(1, 5, 7, 8) XXIII $(-1)^{\frac{t-1}{2}} 2t^3 \vartheta_0^3 \vartheta_2 \vartheta_3 O_2 O_3^6 + (-1)^{\frac{t-1}{2}} 2t^3 \vartheta_2 \vartheta_3^4 O_0 O_2 O_3^5$

$$+(-1)^{\frac{t-1}{2}} 2t^3 \vartheta_2 \vartheta_3^4 O_0 O_2^5 O_3 + (-1)^{\frac{t-1}{2}} t^3 \vartheta_2^5 O_0 O_2 O_3^5$$

$$+(-1)^{\frac{t-1}{2}} t^3 \vartheta_2^5 O_0 O_2^5 O_3 + 30 \vartheta_0^3 \vartheta_2^4 \vartheta_3^4 O_3 - 3\vartheta_2^4 \vartheta_3^7 O_0$$

$$+9\vartheta_2^8 \vartheta_3^3 O_0 = (-1)^{\frac{t-1}{2}} 4t^3 \vartheta_0^3 \vartheta_2 \vartheta_3 O_2^5 O_3^2$$

$$+t^2 \vartheta_0^3 O_2^4 O_3 (\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)$$

(1, 6, 7, 8) XXIV $3t^3 \vartheta_2 (2\vartheta_3^4 + \vartheta_2^4) O_2^6 O_3 - 3t^3 \vartheta_3 (2\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4) O_2 O_3^6$

$$+6t^3 \vartheta_3 (2\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4) O_2^5 O_3^2 - 6t^3 \vartheta_2 (\vartheta_2^4 + 2\vartheta_3^4) O_2^2 O_3^5$$

$$+72(-1)^{\frac{t-1}{2}} \vartheta_2^4 \vartheta_3^7 O_2 - 72(-1)^{\frac{t-1}{2}} \vartheta_2^7 \vartheta_3^4 O_3$$

$$+27(-1)^{\frac{t-1}{2}} \vartheta_2^8 \vartheta_3^3 O_2 - 27(-1)^{\frac{t-1}{2}} \vartheta_2^3 \vartheta_3^8 O_3$$

$$= -3(-1)^{\frac{t-1}{2}} t^2 \vartheta_0^3 O_0^3 O_2 O_3 (\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)$$

Alle diese Formeln gelten für $O_\alpha = \vartheta_\alpha(0, \tau')$ und $\vartheta_\alpha = \vartheta_\alpha(0, \tau)$, also für den Fall $t = 3$ für $O_\alpha = \vartheta_\alpha(0, 3\tau)$ und $\vartheta_\alpha = \vartheta_\alpha(0, \tau)$, und für den Fall $t = 1$ für $O_\alpha = \vartheta_\alpha\left(0, \frac{\tau - 8\xi}{3}\right)$ und $\vartheta_\alpha = \vartheta_\alpha(0, \tau)$ oder, wenn man hier für $\frac{\tau - 8\xi}{3}$ τ einsetzt, für $O_\alpha = \vartheta_\alpha(0, \tau)$ und $\vartheta_\alpha = \vartheta_\alpha(0, 3\tau + 8\xi)$. Man erhält mithin auch im letzteren Falle für $\xi = 0$ Relationen zwischen $\vartheta_\alpha(0, 3\tau)$ und $\vartheta_\alpha(0, \tau)$.

Specialisirt man jetzt wirklich, so erkennt man unmittelbar, dass von allen so erhaltenen 48 Gleichungen zwischen $\vartheta_\alpha(0, 3\tau)$ und $\vartheta_\alpha(0, \tau)$ nur die ersten vier für jeden Fall Gauss'sche Relationen sind, und zwar die, welche Göring §. 3 unter (2) und (3) angiebt, und die Formel $\vartheta_3 O_3 = \vartheta_0 O_0 + \vartheta_2 O_2$, welche letztere man sowohl für $t = 3$ als auch für $t = 1$, $\xi = 0$ aus I erhält. Auch wenn man noch weiter geht und aus den obigen 12 Gleichungen noch weitere Beziehungen aufstellt, so erhält man doch keine Gauss'schen Formeln mehr — für den speciellen Fall $t = 3$ habe ich deren 53 aufgestellt und zwar die einfachsten, von diesen sind aber die letzteren schon ausserordentlich complicirt. —

Somit kann es auf den ersten Blick scheinen, als ob man durch die hier eingeschlagene Methode allerdings auch Relationen zwischen den transformirten Thetafunctionen erhält, aber meist neue und nicht die gewünschten Gauss'schen. Dies ist jedoch nur scheinbar der Fall, denn in Wirklichkeit sind letztere schon sämtlich in den ersten 13 dieser Gleichungen enthalten, und wir erhalten sie zum Teil noch erweitert und ausserdem eine Menge andrer Beziehungen, wenn wir die Gleichungen V—XIII mit Hülfe der ersten 4 und der bekannten sich unmittelbar aus dem Additionstheorem der Thetafunctionen ergebenden Gleichung

$$\vartheta_3^4 = \vartheta_0^4 + \vartheta_2^4$$

umformen.

Indem ich dies jetzt durchführe, will ich zugleich hinter jeder Formel die entsprechenden Göring'schen citiren, welche für die speciellen Fälle $t = 3$ und $t = 1$, $\xi = 0$ darin enthalten sind; im letzteren Falle muss man natürlich dann immer die Θ und ϑ vertauschen, da den Θ im ersten Falle die ϑ im zweiten Fall entsprechen und umgekehrt; ferner will ich, falls die Formeln nicht unter den von Göring angegebenen enthalten sind, die analogen durch gleiche lateinische Buchstaben mit Indices bezeichnen.

Die Gleichung I giebt sowohl für $t = 3$, als $t = 1$, $\xi = 0$ die von Göring angegebene Relation

$$\vartheta_3 O_3 = \vartheta_0 O_0 + \vartheta_2 O_2,$$

für $\xi = 1$ und 2 giebt sie eine Erweiterung derselben, da O_α dann auch resp. $\vartheta_\alpha(0, 3\tau + 8)$ oder $\vartheta_\alpha(0, 3\tau + 16)$ bezeichnet.

II, III und IV geben für $t=3$ das Göring'sche Gleichungssystem § 3, (3) und für $t = 1$, $\xi = 0$ das Gleichungssystem (2) mit einer Erweiterung wie bei I. Aus (2) und (3) folgt sofort (4).

V, VI und X liefern uns in der unmittelbar vorliegenden Form das System

$$t^2O_3{}^4 - \vartheta_3{}^4 = 2\frac{\vartheta_0\vartheta_2}{O_0O_2}(\vartheta_2{}^2O_0{}^2 + \vartheta_0{}^2O_2{}^2)$$

$$\text{(A)}\quad t^2O_2{}^4 - \vartheta_2{}^4 = 2\frac{\vartheta_0\vartheta_3}{O_0O_3}(\vartheta_0{}^2O_3{}^2 - \vartheta_3{}^2O_0{}^2)$$

$$t^2O_0{}^4 - \vartheta_0{}^4 = 2\frac{\vartheta_2\vartheta_3}{O_2O_3}(\vartheta_2{}^2O_3{}^2 - \vartheta_3{}^2O_2{}^2)$$

ein System, welches uns wie alle folgenden allgemeinen Systeme vier verschiedene Systeme repräsentirt, je nachdem man $t = 3$ oder bei $t = 1$, $\xi = 0$, 1 oder 2 setzt.

Subtrahirt man in Gleichung V auf beiden Seiten $2\vartheta_3{}^4$ und setzt für $\vartheta_3{}^4$ rechts den Wert ein, der sich durch Multiplication von I mit III ergiebt, so erhält man die Gleichung

$$\cdot t^2O_3{}^4 - 3\vartheta_3{}^4 = 2(-1)^{\frac{t-1}{2}}t\vartheta_3O_3(\vartheta_2O_2 - \vartheta_0O_0)$$

Diese Gleichung liefert sowohl für $t = 3$, als auch für $t = 1$, $\xi = 0$ die Gleichung (8), für $\xi = 1$ und $\xi = 2$ wieder eine Erweiterung derselben. Verfährt man in analoger Weise mit VI und VII, so erhält man das Gleichungssystem

$$t^2O_3{}^4 - 3\vartheta_3{}^4 = 2(--1)^{\frac{t-1}{2}}t\vartheta_3O_3(\vartheta_2O_2 - \vartheta_0O_0)$$

$$\text{(8)}\quad t^2O_2{}^4 - 3\vartheta_2{}^4 = 2(-1)^{\frac{t-1}{2}}t\vartheta_2O_2(\vartheta_0O_0 + \vartheta_3O_3)$$

$$t^2O_0{}^4 - 3\vartheta_0{}^4 = -2(-1)^{\frac{t-1}{2}}t\vartheta_0O_0(\vartheta_2O_2 + \vartheta_3O_3)$$

Formt man die Gleichungen V, VI und VII durch wiederholte Anwendung der Gleichungen II, III und IV so um, dass sie in Bezug auf die Θ homogen werden, so ergeben sich die Beziehungen

$$\frac{(\vartheta_3{}^2O_2{}^2 - \vartheta_2{}^2O_3{}^2)(\vartheta_0{}^2O_3{}^2 - \vartheta_3{}^2O_0{}^2)}{\vartheta_2{}^2O_0{}^2 + \vartheta_0{}^2O_2{}^2} = 2\vartheta_0\vartheta_2O_0O_2$$

$$\text{(B)}\quad \frac{(\vartheta_2{}^2O_0{}^2 + \vartheta_0{}^2O_2{}^2)(\vartheta_3{}^2O_2{}^2 - \vartheta_2{}^2O_3{}^2)}{\vartheta_0{}^2O_3{}^2 - \vartheta_3{}^2O_0{}^2} = 2\vartheta_0\vartheta_3O_0O_3$$

$$\frac{(\vartheta_2{}^2O_0{}^2 + \vartheta_0{}^2O_2{}^2)(\vartheta_0{}^2O_3{}^2 - \vartheta_3{}^2O_0{}^2)}{\vartheta_3{}^2O_2{}^2 - \vartheta_2{}^2O_3{}^2} = 2\vartheta_2\vartheta_3O_2O_3$$

Beachtet man nun, dass in diesen drei Gleichungen links nur dieselben drei Klammern auftreten, so folgen multiplicando unmittelbar folgende sehr elegante Relationen

$$\vartheta_3^2 O_0^2 - \vartheta_0^2 O_3^2 = 2\vartheta_2 O_2 \sqrt{\vartheta_0 \vartheta_3 O_0 O_3}$$

$$\text{(F)} \quad \vartheta_2^2 O_3^2 - \vartheta_3^2 O_2^2 = 2\vartheta_0 O_0 \sqrt{\vartheta_2 \vartheta_3 O_2 O_3}$$

$$\vartheta_0^2 O_2^2 + \vartheta_2^2 O_0^2 = 2\vartheta_3 O_3 \sqrt{\vartheta_0 \vartheta_2 O_0 O_2}$$

Diese drei Gleichungen sind für $t = 3$ und $t = 1$, $\xi = 0$ identisch mit den Gleichungen (10), für $\xi = 1$ und $\xi = 2$ erweitern sie dieses Gleichungssystem.

Addirt man ferner in den Gleichungen V, VI und VII auf beiden Seiten $4\vartheta_3^4$ und dividirt resp. durch $\vartheta_3 O_3$, $\vartheta_2 O_2$ und $\vartheta_0 O_0$, so erhält man mit Hülfe von I, III und IV

$$\underline{(9)} \quad \frac{t^2 O_3^4 + 3\vartheta_3^4}{\vartheta_3 O_3} = \frac{t^2 O_2^4 + 3\vartheta_2^4}{\vartheta_2 O_2} = \frac{t^2 O_0^4 + 3\vartheta_0^4}{\vartheta_0 O_0} =$$

$$6\frac{\vartheta_2^3}{O_2} + 2(-1)^{\frac{t-1}{2}} t(\vartheta_0 O_0 + \vartheta_3 O_3) = \ldots$$

Auch hier sind wieder die Formeln, die uns die speciellen Fälle $t = 3$ und $t = 1$, $\xi = 0$ liefern, identisch.

VII giebt uns mit XI und XII zusammen in der ursprünglichen Form das System

$$t^2 O_3^4 + \vartheta_3^4 = 2\vartheta_3 O_3 \left(\frac{\vartheta_0^3}{O_0} + \frac{\vartheta_2^3}{O_2}\right)$$

$$\text{(C)} \quad t^2 O_2^4 + \vartheta_2^4 = 2\vartheta_2 O_2 \left(\frac{\vartheta_0^3}{O_0} + \frac{\vartheta_3^3}{O_3}\right)$$

$$t^2 O_0^4 + \vartheta_0^4 = 2\vartheta_0 O_0 \left(\frac{\vartheta_2^3}{O_2} + \frac{\vartheta_3^3}{O_3}\right)$$

Ergänzen wir die linken Seiten dieser drei Gleichungen zum Quadrat, so erhalten wir eine Reihe sehr hübscher Relationen, die sich jedoch einfacher gestalten für die speciellen Fälle als für den allgemeinen; z. B. ergiebt sich aus XI die Beziehung

$$(tO_2^2 \pm \vartheta_2^2)^2 = 2\vartheta_2 O_2 \left\{ \frac{\vartheta_0^3}{O_0}(1 \pm (-1)^{\frac{t-1}{2}}) + \frac{\vartheta_3^3}{O_3}(1 \mp (-1)^{\frac{t-1}{2}}) \right\}$$

Es ist nun aber $(-1)^{\frac{t-1}{2}}$ entweder $= +1$ oder $= -1$, in jedem Fall fällt also eins der Glieder rechts fort, welches ist aber im Allgemeinen nicht zu entscheiden; deshalb will ich hier die Formeln für die speciellen Fälle anführen und dabei gleich für den Fall $t = 1$, $\xi = 0$ die ϑ und Θ vertauschen, so dass überall ist $O_\alpha = \vartheta_\alpha(0, 3\tau)$ und $\vartheta_\alpha = \vartheta_\alpha(0, \tau)$.

$$(3O_0^2-\vartheta_0^2)^2 = 4\vartheta_0 O_0 \frac{\vartheta_3^3}{O_3}; \quad (3O_0^2+\vartheta_0^2)^2 = 4\vartheta_0 O_0 \frac{\vartheta_2^3}{O_2}$$

$$(3O_2^2-\vartheta_2^2)^2 = 4\vartheta_2 O_2 \frac{\vartheta_0^3}{O_0}; \quad (3O_2^2+\vartheta_2^2)^2 = 4\vartheta_2 O_2 \frac{\vartheta_3^3}{O_3}$$

$$(3O_3^2-\vartheta_3^2)^2 = 4\vartheta_3 O_3 \frac{\vartheta_0^3}{O_0}; \quad (3O_3^2+\vartheta_3^2)^2 = 4\vartheta_3 O_3 \frac{\vartheta_2^3}{O_2}$$

(H)

$$(O_0^2-\vartheta_0^2)^2 = 4\vartheta_0 O_0 \frac{O_2^3}{\vartheta_2}; \quad (O_0^2+\vartheta_0^2)^2 = 4\vartheta_0 O_0 \frac{O_3^3}{\vartheta_3}$$

$$(O_2^2-\vartheta_2^2)^2 = 4\vartheta_2 O_2 \frac{O_3^3}{\vartheta_3}; \quad (O_2^2+\vartheta_2^2)^2 = 4\vartheta_2 O_2 \frac{O_0^3}{\vartheta_0}$$

$$(O_3^2-\vartheta_3^2)^2 = 4\vartheta_3 O_3 \frac{O_2^3}{\vartheta_2}; \quad (O_3^2+\vartheta_3^2)^2 = 4\vartheta_3 O_3 \frac{O_0^3}{\vartheta_0}$$

Aus diesen Relationen folgen noch unmittelbar einige andere:

$$O_3^2(3O_0^2-\vartheta_0^2) = \vartheta_3^2(O_0^2+\vartheta_0^2)$$

(7) $$O_0^2(\vartheta_2^2-3O_2^2) = \vartheta_0^2(O_2^2+\vartheta_2^2)$$

$$O_3^2(3O_2^2+\vartheta_2^2) = \vartheta_3^2(\vartheta_2^2-O_2^2)$$

ausserdem noch einige andre, die sich jedoch aus diesen ergeben, wenn man anders zusammenfasst.

Ferner folgt aus (H), wenn man je zwei Gleichungen multiplicirt:

$$9O_0^4-\vartheta_0^4 = 4\vartheta_0 O_0 \sqrt{\frac{\vartheta_2^3\vartheta_3^3}{O_2 O_3}}; \quad \vartheta_0^4-O_0^4 = -4\vartheta_0 O_0 \sqrt{\frac{O_2^3 O_3^3}{\vartheta_2\vartheta_3}}$$

(J) $$9O_2^4-\vartheta_2^4 = -4\vartheta_2 O_2 \sqrt{\frac{\vartheta_0^3\vartheta_3^3}{O_0 O_3}}; \quad \vartheta_2^4-O_2^4 = 4\vartheta_2 O_2 \sqrt{\frac{O_0^3 O_3^3}{\vartheta_0\vartheta_3}}$$

$$9O_3^4-\vartheta_3^4 = 4\vartheta_3 O_3 \sqrt{\frac{\vartheta_0^3\vartheta_2^3}{O_0 O_2}}; \quad \vartheta_3^4-O_3^4 = 4\vartheta_3 O_3 \sqrt{\frac{O_0^3 O_2^3}{\vartheta_0\vartheta_2}}$$

Die gerade nicht sehr eleganten Gleichungen VIII und IX übergehe ich hier: macht man sie aber in Bezug auf die O homogen, so erhalten wir, je nachdem wir dies mit der einen oder den andern der Gleichungen II, III und IV bewerkstelligen, folgende symmetrische Formeln

$$\vartheta_0^4 O_3^4 - 4\vartheta_0^3\vartheta_3 O_0^3 O_3 + 6\vartheta_0^2\vartheta_3^2 O_0^2 O_3^2 - 4\vartheta_0\vartheta_3^3 O_0 O_3^3 + \vartheta_3^4 O_0^4 = 0$$
$$\vartheta_2^4 O_3^4 - 4\vartheta_2^3\vartheta_3 O_2^3 O_3 + 6\vartheta_2^2\vartheta_3^2 O_2^2 O_3^2 - 4\vartheta_2\vartheta_3^3 O_2 O_3^3 + \vartheta_3^4 O_2^4 = 0$$
$$\vartheta_0^4 O_2^4 - 4\vartheta_0^3\vartheta_2 O_0^3 O_2 - 6\vartheta_0^2\vartheta_2^2 O_0^2 O_2^2 - 4\vartheta_0\vartheta_2^3 O_0 O_2^3 + \vartheta_2^4 O_0^4 = 0.$$

Aus diesen drei Gleichungen kann man, wenn man die Glieder in bestimmter Weise zusammenfasst, sowohl das Gleichungssytem (10) als auch das Gleichungssystem (5) herstellen. (10) hatten wir aber schon vorher direct bekommen und ebenso erhalten wir (5) unmittelbar, wenn wir die Gleichungssysteme (2) und (3) mit einander multipliciren. Aus obigen Gleichungen folgt nun aber, dass sie nicht nur für $O_\alpha = \vartheta_\alpha(0, 3\tau)$ gelten, sondern auch für $O_\alpha = \vartheta_\alpha(0, 3\tau+8)$ und $O_\alpha = \vartheta_\alpha(0, 3\tau+16)$. Das Gleichungssystem (5) lautet folgendermassen

$$\left(\frac{O_0^3}{\vartheta_0} - \frac{O_3^3}{\vartheta_3}\right)\left(\frac{\vartheta_3^3}{O_3} - \frac{\vartheta_0^3}{O_0}\right) = 3\vartheta_2^2 O_2^2$$

(5)
$$\left(\frac{O_3^3}{\vartheta_3} - \frac{O_2^3}{\vartheta_2}\right)\left(\frac{\vartheta_2^3}{O_2} - \frac{\vartheta_3^3}{O_3}\right) = 3\vartheta_0^2 O_0^2$$

$$\left(\frac{O_0^3}{\vartheta_0} - \frac{O_2^3}{\vartheta_2}\right)\left(\frac{\vartheta_2^3}{O_2} - \frac{\vartheta_0^3}{O_0}\right) = 3\vartheta_3^2 O_3^2$$

Macht man ferner auch XI und XII homogen, so ergeben sich die Relationen

$$\vartheta_3^2 O_2^2(\vartheta_2^2 O_0^2 + \vartheta_0^2 O_2^2) + \vartheta_2^2 O_3^2(\vartheta_2^2 O_0^2 - \vartheta_0^2 O_2^2) = 2\vartheta_2 O_0 O_2 O_3(\vartheta_0^3 O_3 + \vartheta_3^3 O_0)$$

(E)

$$\vartheta_2^2 O_3^2(\vartheta_3^2 O_0^2 - \vartheta_0^2 O_3^2) + \vartheta_3^2 O_2^2(\vartheta_3^2 O_0^2 + \vartheta_0^2 O_3^2) = 2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3(\vartheta_0^3 O_2 + \vartheta_2^3 O_0)$$

Endlich liefert uns noch XIII, wenn wir es homogen machen, die aufgelösten Gleichungen (1) und zwar für $t = 3$ $(1)_1$ und für $t = 1$, $\xi = 0$ $(1)_2$. XIII erhält so die Form:

$$\vartheta_2^6 O_0^2 O_3^2 + \vartheta_3^6 O_0^2 O_2^2 + \vartheta_0^6 O_2^2 O_3^2 = 2(\vartheta_2^3\vartheta_3^3 O_0^2 O_2 O_3 + \vartheta_0^3\vartheta_2^3 O_0 O_2 O_3^2 + \vartheta_0^3\vartheta_3^3 O_0 O_2^2 O_3)$$

Die Gleichungen (1) selbst erhält man hieraus durch folgendes Verfahren:

Für den Fall $t = 3$ kann man die Gleichung auch so schreiben

$$\left(\frac{\vartheta_0^3}{O_0} + \frac{\vartheta_3^3}{O_3}\right)^2 = 2\frac{\vartheta_2^3}{O_2}\left(\frac{\vartheta_0^3}{O_0} + \frac{\vartheta_3^3}{O_3} - \frac{\vartheta_2^3}{O_2}\right) + 4\frac{\vartheta_0^3\vartheta_3^3}{O_0 O_3} + \frac{\vartheta_2^6}{O_2^2}$$

$$= 2\frac{\vartheta_2^3}{O_2}\left(\frac{\vartheta_3^3}{O_3} - 3\vartheta_3 O_3\right) + 4\frac{\vartheta_0^3\vartheta_3^3}{O_0 O_3} + \frac{\vartheta_2^6}{O_2^2} \quad \text{(nach II)}$$

$$= 2\frac{\vartheta_2^3\vartheta_3}{O_2 O_3}(\vartheta_3^2 - 3O_3^2) + 4\frac{\vartheta_0^3\vartheta_3^3}{O_0 O_3} + \frac{\vartheta_2^6}{O_2^2}$$

$$= \frac{\vartheta_2^6}{O_2^2} - 4\frac{\vartheta_2^3}{O_2}\sqrt{\frac{\vartheta_0^3\vartheta_3^3}{O_0 O_3}} + 4\frac{\vartheta_0^3\vartheta_3^3}{O_0 O_3} \quad \text{(nach } H_3\text{)}$$

Hieraus folgt nun unmittelbar

$$\frac{\vartheta_0^3}{O_0} + \frac{\vartheta_3^3}{O_3} + 2\sqrt{\frac{\vartheta_0^3\vartheta_3^3}{O_0O_3}} = \frac{\vartheta_2^3}{O_2}$$

oder

$$\sqrt{\frac{\vartheta_0^3}{O_0}} + \sqrt{\frac{\vartheta_3^3}{O_3}} = \sqrt{\frac{\vartheta_2^3}{O_2}} = (1)_1.$$

Ganz analog ergiebt sich für $t = 1$ $(1)_2$, so dass man erhält

$$\sqrt{\frac{\vartheta_0^3}{O_0}} + \sqrt{\frac{\vartheta_3^3}{O_3}} - \sqrt{\frac{\vartheta_2^3}{O_2}} = 0$$

(1)

$$\sqrt{\frac{O_3^3}{\vartheta_3}} + \sqrt{\frac{O_2^3}{\vartheta_2}} - \sqrt{\frac{O_0^3}{\vartheta_0}} = 0$$

Mit den Gleichungssystemen (1) (2) und (3) ist nach Vorgang von Göring anch sofort (6) gefunden. Zerlegt man nämlich die Gleichungeu (2) und (3) und beachtet die Beziehungen (1), so folgt leicht

$$\sqrt{\frac{O_3^3}{\vartheta_3}} - \sqrt{\frac{O_2^3}{\vartheta_2}} - \sqrt{\frac{\vartheta_0^3}{O_0}} = 0$$

$$\sqrt{\frac{O_3^3}{\vartheta_3}} + \sqrt{\frac{O_0^3}{\vartheta_0}} - \sqrt{\frac{\vartheta_2^3}{O_2}} = 0$$

$$\sqrt{\frac{O_0^3}{\vartheta_0}} + \sqrt{\frac{O_2^3}{\vartheta_2}} - \sqrt{\frac{\vartheta_3^3}{O_3}} = 0$$

(6)

$$3\sqrt{\frac{O_3^3}{\vartheta_3}} - \sqrt{\frac{\vartheta_0^3}{O_0}} - \sqrt{\frac{\vartheta_2^3}{O_2}} = 0$$

$$3\sqrt{\frac{O_0^3}{\vartheta_0}} - \sqrt{\frac{\vartheta_2^3}{O_2}} - \sqrt{\frac{\vartheta_3^3}{O_3}} = 0$$

$$3\sqrt{\frac{O_2^3}{\vartheta_2}} + \sqrt{\frac{\vartheta_0^3}{O_0}} - \sqrt{\frac{\vartheta_3^3}{O_3}} = 0$$

In gleicher Weise könnte man fortfahren und auch die übrigen Gleichungen umformen.

Dieselben werden aber um so complicirter, je weiter man geht, und will ich für jetzt davon abstehen.

Ferner kann man auch noch die Gleichungen, die sich für die speciellen Fälle $t = 3$, und $t = 1$, $\xi = 0$ ergeben, mit einander combiniren, zumal die Gleichungen für $t = 3$ mit Hülfe von II, III und IV für $t = 1$, $\xi = 0$ umformen und umgekehrt.

Tut man dies bei den linken Seiten der Gleichungen F, so erhält man

$$\begin{aligned}
&\vartheta_0^2(\vartheta_2^2\vartheta_3^2 - O_2^2O_3^2) = O_0^2(\vartheta_2^2O_3^2 - \vartheta_3^2O_2^2)\\
&O_0^2(\vartheta_2^2\vartheta_3^2 - 9O_2^2O_3^2) = \vartheta_0^2(\vartheta_2^2O_3^2 - \vartheta_3^2O_2^2)
\end{aligned} \qquad (11)$$

und noch vier andre Gleichungen, die aber auch direct aus diesen entstehen, wenn man anders zusammenfasst.

Aus diesen Gleichungen und aus (F) folgt noch sofort

$$(\vartheta_2^2\vartheta_3^2 - O_2^2O_3^2)^2 = 4\frac{O_0^6}{\vartheta_0^2}\vartheta_2\vartheta_3O_2O_3$$

$$(\vartheta_0^2\vartheta_3^2 - O_0^2O_3^2)^2 = 4\frac{O_2^6}{\vartheta_2^2}\vartheta_0\vartheta_3O_0O_3$$

$$(\vartheta_0^2\vartheta_2^2 + O_0^2O_2^2)^2 = 4\frac{O_3^6}{\vartheta_3^2}\vartheta_0\vartheta_2O_0O_2 \qquad (G)$$

$$(\vartheta_2^2\vartheta_3^2 - 9O_2^2O_3^2)^2 = 4\frac{\vartheta_0^6}{O_0^2}\vartheta_2\vartheta_3O_2O_3$$

$$(\vartheta_0^2\vartheta_3^2 - 9O_0^2O_3^2)^2 = 4\frac{\vartheta_2^6}{O_2^2}\vartheta_0\vartheta_3O_0O_3$$

$$(\vartheta_0^2\vartheta_2^2 + 9O_0^2O_2^2)^2 = 4\frac{\vartheta_3^6}{O_3^2}\vartheta_0\vartheta_2O_0O_2$$

Die meisten Gleichungen, die man so erhält, sind schon unter den früheren als specielle Fälle enthalten, als neue habe ich nur noch gefunden:

$$\begin{aligned}
\frac{3O_3^4 - \vartheta_3^4}{\vartheta_3O_3} &= 2\frac{\vartheta_0\vartheta_2^3 - 3O_0^3O_2}{\vartheta_0O_2}\\
\frac{3O_2^4 - \vartheta_2^4}{\vartheta_2O_2} &= 2\frac{\vartheta_0\vartheta_3^3 - 3O_0^3O_3}{\vartheta_0O_3}
\end{aligned} \qquad (D)$$

Fassen wir jetzt Alles zusammen, so sehen wir, dass sämmtliche von Göring angegebene Relationen auch auf diesem Wege gefunden sind, und dass dieselben zum grossen Teil in erweitertem Sinne gelten, es bestehen nämlich die Relationen $(1)_2$, (2), (5), (8), (9) und (10) nicht nur zwischen $\vartheta_\alpha(0, 3\tau)$ und $\vartheta_\alpha(0, \tau)$, sondern allgemein zwischen $\vartheta_\alpha(0, 3\tau + 8\xi)$ und $\vartheta_\alpha(0, \tau)$, wo ξ die Werte 0, 1 und 2 annehmen kann.

Ausser diesen Beziehungen sind aber noch eine ganze Reihe anderer abgeleitet, von denen die meisten auch ganz allgemein gelten wenigstens für den Fall $t = 1$.

Die Formeln, die Göring zwischen $\vartheta_\alpha(0, 3\tau)$, $\vartheta_\alpha(0, \tau)$ und $\vartheta_\alpha\left(0, \frac{\tau}{3}\right)$ angiebt, liegen ausserhalb des Bereiches der hier geführten Betrachtungen, ich wende mich deshalb jetzt sofort zum Fall $n = 5$.

§ 4.

Auch für den Fall $n = 5$ genügt es Zwecks Herstellung der Gauss'schen Formeln eins der Systeme B zu entwickeln. Ich wähle hier wieder das System B_I, dasselbe nimmt für $n = 5$ folgende Gestalt an:

$$1)\quad \vartheta_3{}^5\frac{\vartheta_0(v', \tau')}{\vartheta_0{}^5(v, \tau)} = x_1\vartheta_3{}^5 + x_2\vartheta_3{}^3\vartheta_2{}^2\mathrm{sn}^2(u, k) + x_3\vartheta_3\vartheta_2{}^4\mathrm{sn}^4(u, k)$$

$$2)\quad \frac{O_2}{O_0}\vartheta_0{}^5\mathrm{cn}(u', c)\frac{\vartheta_0(v', \tau')}{\vartheta_0{}^5(v, \tau)} = x_1\vartheta_2{}^5\mathrm{cn}^5(u, k) + x_2\vartheta_2{}^3\vartheta_3{}^2\mathrm{cn}^3(u, k)\mathrm{dn}^2(u, k)$$
$$+ x_3\vartheta_2\vartheta_3{}^4\mathrm{cn}(u, k)\mathrm{dn}^4(u, k).$$

$$3)\quad \frac{O_3}{O_0}\vartheta_0{}^5\mathrm{dn}(u', c)\frac{\vartheta_0(v', \tau')}{\vartheta_0{}^5(v, \tau)} = x_1\vartheta_3{}^5\mathrm{dn}^5(u, k) + x_2\vartheta_3{}^3\vartheta_2{}^2\mathrm{dn}^3(u, k)\mathrm{cn}^2(u, k)$$
$$+ x_3\vartheta_3\vartheta_2{}^4\mathrm{dn}(u, k)\mathrm{cn}^4(u, k)$$

$$4)\quad \frac{O_2}{O_3}\vartheta_3{}^5\mathrm{sn}(u', c)\frac{\vartheta_0(v', \tau')}{\vartheta_0{}^5(v, \tau)} = x_1\vartheta_2{}^5\mathrm{sn}^5(u, k) + x_2\vartheta_2{}^3\vartheta_3{}^2\mathrm{sn}^3(u, k)$$
$$+ x_3\vartheta_2\vartheta_3{}^4\mathrm{sn}(u, k)$$

Schreitet man auch hier bei der Entwicklung bis zur fünften Potenz von u vor, so erhält man folgende 12 Gleichungen:

$$(1)\quad y_0 = x_1$$

$$(2)\quad \vartheta_0{}^5O_2y_0 = \vartheta_2{}^5O_0x_1 + x_2\vartheta_2{}^3\vartheta_3{}^2O_0 + x_3\vartheta_2\vartheta_3{}^4O_0$$

$$(3)\quad \vartheta_0{}^5O_3y_0 = \vartheta_3{}^5O_0x_1 + x_2\vartheta_2{}^2\vartheta_3{}^3O_0 + x_3\vartheta_2{}^4\vartheta_3O_0$$

$$(4)\quad tO_2O_3y_0 = \vartheta_2\vartheta_3x_3$$

$$(5)\quad \vartheta_3{}^2y_2 = \vartheta_2{}^2x_2$$

$$(6)\quad t^2\vartheta_0{}^5O_2O_3{}^4y_0 - 2y_2\vartheta_0{}^5\vartheta_3{}^4O_2 = 5x_1\vartheta_2{}^5\vartheta_3{}^4O_0$$
$$+ x_2\vartheta_2{}^3\vartheta_3{}^2O_0(2\vartheta_2{}^4 + 3\vartheta_3{}^4) + x_3\vartheta_2\vartheta_3{}^4O_0(4\vartheta_2{}^4 + \vartheta_3{}^4)$$

$$(7)\quad t^2\vartheta_0{}^5O_2{}^4O_3y_0 - 2y_2\vartheta_0{}^5\vartheta_3{}^4O_3 = 5x_1\vartheta_2{}^4\vartheta_3{}^5O_0$$
$$+ x_2\vartheta_2{}^2\vartheta_3{}^3O_0(3\vartheta_2{}^4 + 2\vartheta_3{}^4) + x_3\vartheta_2{}^4\vartheta_3O_0(\vartheta_2{}^4 + 4\vartheta_3{}^4)$$

$$(8)\quad t^3 y_0 O_2 O_3 (O_2^4 + O_3^4) - 6 t y_2 \vartheta_3^4 O_2 O_3 = -6 x_2 \vartheta_2^3 \vartheta_3^3 + x_3 \vartheta_2 \vartheta_3 (\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)$$

$$(9)\quad 3\vartheta_3^6 y_4 = -x_2 \vartheta_2^2 (\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4) + 3 x_3 \vartheta_2^4 \vartheta_3^2$$

$$(10)\quad t^4 y_0 \vartheta_0^5 O_2 O_3^4 (4 O_2^4 + O_3^4) - 12 t^2 y_2 \vartheta_0^5 \vartheta_3^4 O_2 O_3^4 + 24 y_4 \vartheta_0^5 \vartheta_3^8 O_2 = x_1 \vartheta_2^5 \vartheta_3^4 O_0 (20 \vartheta_2^4 + 65 \vartheta_3^4) + x_2 \vartheta_2^3 \vartheta_3^2 O_0 (8 \vartheta_2^8 + 56 \vartheta_2^4 \vartheta_3^4 + 21 \vartheta_3^8) + x_3 \vartheta_2 \vartheta_3^4 O_0 (40 \vartheta_2^8 + 44 \vartheta_2^4 \vartheta_3^4 + \vartheta_3^8)$$

$$(11)\quad t^4 y_0 \vartheta_0^5 O_2^4 O_3 (O_2^4 + 4 O_3^4) - 12 t^2 y_2 \vartheta_0^5 \vartheta_3^4 O_2^4 O_3 + 24 y_4 \vartheta_0^5 \vartheta_3^8 O_3 = x_1 \vartheta_2^4 \vartheta_3^5 O_0 (65 \vartheta_2^4 + 20 \vartheta_3^4) + x_2 \vartheta_2^2 \vartheta_3^3 O_0 (21 \vartheta_2^8 + 56 \vartheta_2^4 \vartheta_3^4 + 8 \vartheta_3^8) + x_3 \vartheta_2^4 \vartheta_3 O_0 (\vartheta_2^8 + 44 \vartheta_2^4 \vartheta_3^4 + 40 \vartheta_3^8)$$

$$(12)\quad t^5 y_0 O_2 O_3 (O_2^8 + 4 O_2^4 O_3^4 + O_3^8) - 20 t^3 y_2 \vartheta_3^4 O_2 O_3 (O_2^4 + O_3^4) + 120 t y_4 \vartheta_3^8 O_2 O_3 = 120 x_1 \vartheta_2^5 \vartheta_3^5 - 60 x_2 \vartheta_2^3 \vartheta_3^3 (\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4) + x_3 \vartheta_2 \vartheta_3 (\vartheta_2^8 + 4 \vartheta_2^4 \vartheta_3^4 + \vartheta_3^8)$$

Diese 12 Gleichungen enthalten nur die 6 Unbekannten $y_0, y_2, y_4, x_1, x_2, x_3$, ergeben also, wenn man diese eliminirt, eine Menge Relationen zwischen $\vartheta_\alpha(0, \tau')$ und $\vartheta_\alpha(0, \tau)$, wo $\vartheta_\alpha(0, \tau') = O_\alpha$ für $t = 5$ den Wert $\vartheta_\alpha(0, 5\tau)$ hat, dagegen für $t = 1$ die 5 verschiedenen Werte annehmen kann $\vartheta_\alpha\left(0, \frac{\tau - 8\xi}{5}\right)$, $\xi = 0, 1, 2, 3$ und 4. Die elegantsten dieser Relationen sind:

$$(1, 2, 3, 4)\quad \mathrm{I}\quad \vartheta_0 \vartheta_3 O_2 - \vartheta_0 \vartheta_2 O_3 + \vartheta_2 \vartheta_3 O_0 = t O_0 O_2 O_3$$

oder

$$(21)\quad \frac{\vartheta_0 \vartheta_3}{O_0 O_3} + \frac{\vartheta_2 \vartheta_3}{O_2 O_3} - \frac{\vartheta_0 \vartheta_2}{O_0 O_2} = t \quad \text{oder} \quad \frac{O_0}{\vartheta_0} + \frac{O_2}{\vartheta_2} - \frac{O_3}{\vartheta_3} = t \frac{O_0 O_2 O_3}{\vartheta_0 \vartheta_2 \vartheta_3}$$

Diese Formeln repräsentiren uns für die speciellen Fälle $t = 5$ und $t = 1$ das Göring'sche Gleichungssystem § 4. (21), für den Fall $t = 1$ natürlich wieder eine Erweiterung der Gleichungen $(21)_1$ und $(21)_3$.

Die übrigen Beziehungen, die man durch die Combination der Gleichungen (1), (2), (3), (4) (5), (6), (7) erhält, bieten sich zum Teil zunächst in nicht sehr schöner Form dar; da man sie ausserdem alle bis auf die Formel, die man durch Combination von (4), (5), (6) und (7) bekommt, mit Hülfe von I auf einander reduciren kann, will ich hier nur die elegantsten derselben angeben:

$$\begin{cases}
(2,\ 4,\ 5,\ 6)\quad \text{II}\quad t^2O_3{}^4-3\vartheta_3{}^4=2\dfrac{\vartheta_0{}^5O_2}{\vartheta_2O_0}+2\dfrac{\vartheta_2{}^5O_0}{\vartheta_0O_2}-2t\vartheta_3{}^3O_3\left(\dfrac{O_2}{\vartheta_2}+\dfrac{O_0}{\vartheta_0}\right)\\
(3,\ 4,\ 5,\ 7)\quad \text{III}\quad t^2O_2{}^4-3\vartheta_2{}^4=2\dfrac{\vartheta_0{}^5O_3}{\vartheta_3O_0}-2\dfrac{\vartheta_3{}^5O_0}{\vartheta_0O_3}+2t\vartheta_2{}^3O_2\left(\dfrac{O_0}{\vartheta_0}-\dfrac{O_3}{\vartheta_3}\right)\\
(\text{II}-\text{III})\quad \text{IV}\quad t^2O_0{}^4-3\vartheta_0{}^4=2\dfrac{\vartheta_2{}^5O_3}{\vartheta_3O_2}-2\dfrac{\vartheta_3{}^5O_2}{\vartheta_2O_3}+2t\vartheta_0{}^3O_0\left(\dfrac{O_2}{\vartheta_2}-\dfrac{O_3}{\vartheta_3}\right)
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
(2,\ 3,\ 5,\ 6)\quad \text{V}\quad t^2O_3{}^4+\vartheta_3{}^4\\
\qquad=2\vartheta_3{}^3O_3\left(\dfrac{\vartheta_0}{O_0}+\dfrac{\vartheta_2}{O_2}\right)-2\dfrac{\vartheta_0\vartheta_2}{O_0O_2}(\vartheta_0{}^2O_0{}^2+\vartheta_2{}^2O_2{}^2)\\
(2,\ 3,\ 5,\ 7)\quad \text{VI}\quad t^2O_2{}^4+\vartheta_2{}^4\\
\qquad=2\vartheta_2{}^3O_2\left(\dfrac{\vartheta_3}{O_3}-\dfrac{\vartheta_0}{O_0}\right)+2\dfrac{\vartheta_0\vartheta_3}{O_0O_3}(\vartheta_3{}^2O_3{}^2-\vartheta_0{}^2O_0{}^2)\\
(2,\ 3,\ 6,\ 7)\quad \text{VII}\quad t^2O_0{}^4+\vartheta_0{}^4\\
\qquad=2\vartheta_0{}^3O_0\left(\dfrac{\vartheta_3}{O_3}-\dfrac{\vartheta_2}{O_2}\right)+2\dfrac{\vartheta_2\vartheta_3}{O_2O_3}(\vartheta_3{}^2O_3{}^2-\vartheta_2{}^2O_2{}^2)
\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&(4,\ 5,\ 6,\ 7)\quad \text{VIII}\quad 2t^2\vartheta_0{}^6O_0{}^4O_2O_3+3t^2\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3O_0O_2O_3(\vartheta_2{}^3O_3{}^3-\vartheta_3{}^3O_2{}^3)\\
&\quad+2t^2\vartheta_0O_0O_2O_3(\vartheta_3{}^5O_3{}^3-\vartheta_2{}^5O_2{}^3)+2t\vartheta_0O_0O_2O_3\\
&\quad\times(\vartheta_2{}^7O_2+4\vartheta_2{}^3\vartheta_3{}^4O_2-4\vartheta_2{}^4\vartheta_3{}^3O_3-\vartheta_3{}^7O_3)\\
&\quad-tO_0{}^2O_2O_3(2\vartheta_2{}^8-9\vartheta_2{}^4\vartheta_3{}^4+2\vartheta_3{}^8)=5\vartheta_2{}^5\vartheta_3{}^5O_0{}^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{cases}
(2,\ 4,\ 5,\ 8)\quad \text{IX}\quad t\vartheta_3O_0O_2O_3\{t^2(O_2{}^4+O_3{}^4)-(\vartheta_2{}^4+\vartheta_3{}^4)\}\\
\qquad=6t^2\vartheta_0{}^5O_2O_3{}^2-6t^2O_3{}^2\vartheta_2{}^3O_0O_2{}^2O_3{}^2+6\vartheta_3{}^2(\vartheta_2{}^5O_0-\vartheta_0{}^5O_2)\\
(3,\ 4,\ 5,\ 8)\quad \text{X}\quad t\vartheta_2O_0O_2O_3\{t^2(O_2{}^4+O_3{}^4)-(\vartheta_2{}^4+\vartheta_3{}^4)\}\\
\qquad=6t\vartheta_0{}^5O_2{}^2O_3-6t^2\vartheta_3{}^3O_0O_2{}^2O_3{}^2+6\vartheta_2{}^2(\vartheta_3{}^5O_0-\vartheta_0{}^5O_3)
\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&(2,\ 3,\ 5,\ 8)\quad \text{XI}\quad t^3O_0{}^2O_2O_3(O_2{}^4+O_3{}^4)\\
&\quad=(\vartheta_2{}^4+\vartheta_3{}^4)(\vartheta_2\vartheta_3O_0{}^2-5\vartheta_0\vartheta_3O_0O_2+5\vartheta_0\vartheta_2O_0O_3+6\vartheta_0{}^2O_2O_3)\\
&\quad-6\vartheta_0{}^2O_2O_3(\vartheta_3{}^2O_3{}^2+\vartheta_2{}^2O_2{}^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{cases}
(2,\ 4,\ 6,\ 8)\quad \text{XII}\quad t\vartheta_0O_0O_2O_3\{t^2(2O_3{}^4-O_2{}^4)-(5\vartheta_2{}^4+2\vartheta_3{}^4)\}\\
\qquad=-6t^2\vartheta_3{}^3O_0{}^2O_2O_3{}^2+6t\vartheta_2{}^5O_0{}^2O_3+6\vartheta_0\vartheta_3(\vartheta_0{}^5O_2-\vartheta_2{}^5O_0)\\
(3,\ 4,\ 7,\ 8)\quad \text{XIII}\quad t\vartheta_0O_0O_2O_3\{t^2(2O_2{}^4-O_3{}^4)-(2\vartheta_2{}^4+5\vartheta_3{}^4)\}\\
\qquad=6t^2\vartheta_2{}^3O_0{}^2O_2{}^2O_3-6t\vartheta_3{}^5O_0{}^2O_2+6\vartheta_0\vartheta_2(\vartheta_0{}^5O_3-\vartheta_3{}^5O_0)
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
(3,\ 4,\ 6,\ 8)\quad \text{XIV}\quad t\vartheta_0\vartheta_3O_0O_2O_3\{t^2(2O_3{}^4-O_2{}^4)+(7\vartheta_2{}^4+\vartheta_3{}^4)\}\\
\qquad=3t^2O_0{}^2O_2O_3{}^2(2\vartheta_2{}^4+\vartheta_3{}^4)-9t\vartheta_2\vartheta_3{}^5O_0{}^2O_3\\
\qquad+3t\vartheta_0\vartheta_2O_0O_3{}^2(2\vartheta_2{}^4+3\vartheta_3{}^4)+6\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3(\vartheta_0{}^5O_3-\vartheta_3{}^5O_0)\\
(2,\ 4,\ 7,\ 8)\quad \text{XV}\quad t\vartheta_0\vartheta_2O_0O_2O_3\{t^2(2O_2{}^4-O_3{}^4)+(\vartheta_2{}^4+7\vartheta_3{}^4)\}\\
\qquad=-3t^2O_0{}^2O_2{}^2O_3(\vartheta_2{}^4+2\vartheta_3{}^4)+9t\vartheta_2{}^5\vartheta_3O_0{}^2O_2\\
\qquad+3t\vartheta_0\vartheta_3O_0O_2{}^2(3\vartheta_2{}^4+2\vartheta_3{}^4)+6\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3(\vartheta_0{}^5O_2-\vartheta_2{}^5O_0)
\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}(4,\ 5,\ 6,\ 8)\quad \text{XVI}\quad 2t^3\vartheta_0^5 O_2^2 O_3(O_2^4-2O_3^4)+2t^3\vartheta_2^5 O_0 O_2 O_3(O_2^4+O_3^4)\\ \quad +3t^3\vartheta_2\vartheta_3^4 O_0 O_2 O_3(O_2^4+O_3^4)+6t^2\vartheta_3^3 O_0 O_2^2 O_3^2(4\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)\\ \quad +6t^2\vartheta_0^5\vartheta_2\vartheta_3 O_2 O_3^4=2t\vartheta_0^5 O_2^2 O_3(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)\\ \quad +t\vartheta_2 O_0 O_2 O_3(2\vartheta_2^8-\vartheta_2^4\vartheta_3^4+9\vartheta_3^8)+30\vartheta_2^6\vartheta_3^5 O_0\\ (4,\ 5,\ 7,\ 8)\quad \text{XVII}\quad 2t^3\vartheta_0^5 O_2 O_3^2(O_3^4-2O_2^4)+2t^3\vartheta_3^5 O_0 O_2 O_3(O_2^4+O_3^4)\\ \quad +3t^3\vartheta_2^4\vartheta_3 O_0 O_2 O_3(O_2^4+O_3^4)+6t^2\vartheta_2^3 O_0 O_2^2 O_3^2(\vartheta_2^4+4\vartheta_3^4)\\ \quad +6t^2\vartheta_0^5\vartheta_2\vartheta_3 O_2^4 O_3=2t\vartheta_0^5 O_2 O_3^2(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)\\ \quad +t\vartheta_3 O_0 O_2 O_3(9\vartheta_2^8-\vartheta_2^4\vartheta_3^4+2\vartheta_3^8)+30\vartheta_2^5\vartheta_3^6 O_0.\end{array}\right.$$

. . . . . .

Aus diesen Relationen, die zum Teil schon sehr einfach sind, erhält man noch eine Reihe anderer, wenn man sie mit Hülfe der Gleichung I umformt. Macht man durch wiederholte Anwendung von I die Gleichungen II, III und IV homogen in Bezug auf die O, so ergeben sich folgende elegante Beziehungen

$$(\vartheta_0 O_3-\vartheta_3 O_0)^2(\vartheta_2 O_3-\vartheta_3 O_2)^2=2\vartheta_0\vartheta_2 O_0 O_2(\vartheta_3^2 O_3^2-\vartheta_0^2 O_0^2-\vartheta_2^2 O_2^2)$$

$$\text{(A)}\quad \begin{array}{l}(\vartheta_2 O_3-\vartheta_3 O_2)^2(\vartheta_0 O_2+\vartheta_2 O_0)^2=2\vartheta_0\vartheta_3 O_0 O_3(\vartheta_3^2 O_3^2-\vartheta_0^2 O_0^2-\vartheta_2^2 O_2^2)\\ (\vartheta_0 O_3-\vartheta_3 O_0)^2(\vartheta_0 O_2+\vartheta_2 O_0)^2=2\vartheta_2\vartheta_3 O_2 O_3(\vartheta_3^2 O_3^2-\vartheta_0^2 O_0^2-\vartheta_2^2 O_2^2)\end{array}$$

Hieraus folgen unmittelbar durch Division je zweier Gleichungen die Formeln

$$\text{(F)}\quad \begin{array}{l}\vartheta_3 O_3(\vartheta_0 O_3-\vartheta_3 O_0)^2=\vartheta_2 O_2(\vartheta_0 O_2+\vartheta_2 O_0)^2\\ \vartheta_2 O_3(\vartheta_2 O_3-\vartheta_3 O_2)^2=\vartheta_0 O_0(\vartheta_0 O_2+\vartheta_2 O_0)^2\\ \vartheta_2 O_2(\vartheta_2 O_3-\vartheta_3 O_2)^2=\vartheta_0 O_0(\vartheta_0 O_3-\vartheta_3 O_0)^2\end{array}$$

und somit nach (A)

$$\text{(G)}\quad 2\vartheta_3^2 O_3^2-2\vartheta_0^2 O_0^2-2\vartheta_2^2 O_2^2=\frac{(\vartheta_3 O_0-\vartheta_0 O_3)^4}{\vartheta_2^2 O_2^2}=\frac{(\vartheta_2 O_3-\vartheta_3 O_2)^4}{\vartheta_0^2 O_0^2}=\frac{(\vartheta_0 O_2+\vartheta_2 O_0)^4}{\vartheta_3^2 O_3^2}$$

Ergänzt man ferner die linken Seiten der Gleichungen V, VI, VII zum Quadrat, so erhält man folgende sehr schöne Beziehungen:

$$(\vartheta_3^2-tO_3^2)^2=2\frac{\vartheta_0\vartheta_2}{O_0 O_2}(\vartheta_3^2 O_3^2-\vartheta_0^2 O_0^2-\vartheta_2^2 O_2^2)$$

$$\text{(B)}\quad (\vartheta_2^2-tO_2^2)^2=2\frac{\vartheta_0\vartheta_3}{O_0 O_3}(\vartheta_3^2 O_3^2-\vartheta_0^2 O_0^2-\vartheta_2^2 O_2^2)$$

$$(\vartheta_0^2-tO_0^2)^2=2\frac{\vartheta_2\vartheta_3}{O_2 O_3}(\vartheta_3^2 O_3^2-\vartheta_0^2 O_0^2-\vartheta_2^2 O_2^2)$$

Aus (B) und (G) könnte man nun noch eine Reihe von Beziehungen herleiten, ich verschiebe dies jedoch auf später.

Man hat somit schon eine ganze Reihe zum Teil sehr eleganter Relationen, unter allen diesen befinden sich ausser in I keine von Göring angegebene. Solche erhält man erst, wenn man die speciellen Fälle $t = 5$ und $t = 1,\ \xi = 0$ mit einander combinirt, dann aber ergeben sie sich meist in sehr einfacher Weise, wie folgt:

Ich will zu diesem Zwecke die Formeln, welche sich aus den obigen für $t = 5$ ergeben, mit einem Strich bezeichnen, und die für $t = 1,\ \xi = 0$ mit zweien.

Addirt man I′ und I″, so erhält man, wenn man richtig zusammenfasst, $\underline{(17)_2}$, subtrahirt man beide Gleichungen, so $\underline{(17)_1}$; und multiplicirt man I′ mit $\sqrt{5}$ und I″ mit 5, so ergibt sich addendo $\underline{(17)_4}$ und subtrahendo $\underline{(17)_3}$:

$$\begin{aligned}(\vartheta_3 - O_3)(\vartheta_0 + O_0)(\vartheta_2 + O_2) &= 4O_0O_2O_3\\ (\vartheta_3 + O_3)(\vartheta_0 - O_0)(O_2 - \vartheta_2) &= 4O_0O_2O_3\end{aligned}$$

$$\underline{(17)}\qquad \begin{aligned}(\sqrt{5}O_3 - \vartheta_3)(\sqrt{5}O_0 + \vartheta_0)(\sqrt{5}O_2 + \vartheta_2) &= 4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3\\ (\sqrt{5}O_3 + \vartheta_3)(\sqrt{5}O_0 - \vartheta_0)(\vartheta_2 - \sqrt{5}O_2) &= 4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3\end{aligned}$$

Mit dem Gleichungssystem (17) hat man auch sofort $\underline{(16)}$, wenn man je zwei Gleichungen von (17) mit einander multiplicirt.

$$\underline{(16)}\qquad \begin{aligned}(\vartheta_3^2 - O_3^2)(O_0^2 - \vartheta_0^2)(\vartheta_2^2 - O_2^2) &= 16O_0^2O_2^2O_3^2\\ (\vartheta_3^2 - 5O_3^2)(\vartheta_0^2 - 5O_0^2)(\vartheta_2^2 - 5O_2^2) &= 16\vartheta_0^2\vartheta_2^2\vartheta_3^2\end{aligned}$$

Multiplicirt man I′ und I″, so folgt

$$\begin{aligned}\text{(E)}\quad 8\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3O_0O_2O_3 = {}&\vartheta_3O_3(\vartheta_0O_2 + \vartheta_2O_0)^2 - \vartheta_0O_0(\vartheta_2O_3 - \vartheta_3O_2)^2\\ &- \vartheta_2O_2(\vartheta_0O_3 - \vartheta_3O_0)^2\end{aligned}$$

Diese Gleichung enthält sämmtliche Formeln (15) in sich. Man kann sie nämlich auch schreiben

$$\begin{aligned}&\vartheta_0^2\vartheta_2O_3^2O_2 + \vartheta_2\vartheta_3^2O_0^2O_2 + 2\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3O_0O_2O_3 - \vartheta_0\vartheta_3O_2(\vartheta_0O_2O_3 - \vartheta_3O_0O_2)\\ &\quad - \vartheta_2O_0O_3(\vartheta_2\vartheta_3O_0 - \vartheta_0\vartheta_2O_3) = 0\end{aligned}$$

Ergänzt man die Klammern so, dass man resp. I′ und I″ darauf anwenden kann, so erhält man unmittelbar die Gleichung $\underline{(15)_1}$, in gleicher Weise erhält man, wenn man die Glieder, in denen die Ausdrücke $\vartheta_2\vartheta_3O_0$ und $\vartheta_0O_2O_3$ vorkommen, zusammenfasst, $\underline{(15)_2}$ und ganz analog $\underline{(15)_3}$:

$$\text{(15)}\qquad \begin{aligned}\vartheta_0^2O_3^2 + \vartheta_3^2O_0^2 + 4\vartheta_0\vartheta_3O_0O_3 - \vartheta_0^2\vartheta_3^2 - 5O_0^2O_3^2 &= 0\\ \vartheta_2^2O_3^2 + \vartheta_3^2O_2^2 + 4\vartheta_2\vartheta_3O_2O_3 - \vartheta_2^2\vartheta_3^2 - 5O_2^2O_3^2 &= 0\\ \vartheta_2^2O_0^2 + \vartheta_0^2O_2^2 + 4\vartheta_0\vartheta_2O_0O_2 - \vartheta_0^2\vartheta_2^2 - 5O_0^2O_2^2 &= 0\end{aligned}$$

Ersetzt man ferner in (E) zwei der Klammern durch Ausdrücke mit der dritten nach (F), so folgt die wichtige Relation

$$8\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3 = (\vartheta_0 O_2 + \vartheta_2 O_0)^2 \frac{\vartheta_3^2 O_3^2 - \vartheta_0^2 O_0^2 - \vartheta_2^2 O_2^2}{\vartheta_3 O_3}$$

oder nach G

$$\text{(H)} \quad 16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3 = \frac{(\vartheta_0 O_2 + \vartheta_2 O_0)^6}{\vartheta_3^3 O_3^3} = \frac{(\vartheta_3 O_0 - \vartheta_0 O_3)^6}{\vartheta_2^3 O_2^3} = \frac{(\vartheta_2 O_3 - \vartheta_3 O_2)^6}{\vartheta_0^3 O_0^3}.$$

und andrerseits

$$\underline{(14)} \quad 2\vartheta_3^2 O_3^2 - 2\vartheta_0^2 O_0^2 - 2\vartheta_2^2 O_2^2 = (16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3)^{\frac{2}{3}}$$

Multiplicirt man (B)′ mit (B)″, so ergibt sich unmittelbar

$$\underline{(8)} \text{ und } \underline{(9)} \quad (\vartheta_3^2 - O_3^2)(5O_3^2 - \vartheta_3^2) = (\vartheta_2^2 - O_2^2)(\vartheta_2^2 - 5O_2^2) = (\vartheta_0^2 - O_0^2)(\vartheta_0^2 - 5O_0^2) = 2(\vartheta_3^2 O_3^2 - \vartheta_0^2 O_0^2 - \vartheta_2^2 O_2^2)$$

Diese Gleichung enthält ferner noch das Gleichungssystem (7), man erhält dieses daraus nur mit Hülfe von der Gleichung

$$\vartheta_3^4 = \vartheta_0^4 + \vartheta_2^4.$$

Es lautet

$$\underline{(7)} \quad \begin{aligned} (\vartheta_3^2 - O_3^2)^2 - (\vartheta_0^2 - O_0^2)^2 &= 4O_2^2(\vartheta_2^2 - O_2^2) \\ (\vartheta_3^2 - O_3^2)^2 - (\vartheta_2^2 - O_2^2)^2 &= 4O_0^2(\vartheta_0^2 - O_0^2) \\ (\vartheta_2^2 - O_2^2)^2 + (\vartheta_0^2 - O_0^2)^2 &= 4O_3^2(\vartheta_3^2 - O_3^2) \\ (5O_3^2 - \vartheta_3^2)^2 - (5O_0^2 - \vartheta_0^2)^2 &= 4\vartheta_2^2(5O_2^2 - \vartheta_2^2) \\ (5O_3^2 - \vartheta_3^2)^2 - (5O_2^2 - \vartheta_2^2)^2 &= 4\vartheta_0^2(5O_0^2 - \vartheta_0^2) \\ (5O_2^2 - \vartheta_2^2)^2 + (5O_0^2 - \vartheta_0^2)^2 &= 4\vartheta_3^2(5O_3^2 - \vartheta_3^2) \end{aligned}$$

Die Gleichungssysteme (8) (9) und (14) liefern uns sofort auch

$$\text{(13)} \quad (\vartheta_2^2 - O_2^2)(\vartheta_2^2 - 5O_2^2) = (\vartheta_0^2 - O_0^2)(\vartheta_0^2 - 5O_0^2) = (\vartheta_3^2 - O_3^2)(5O_3^2 - \vartheta_3^2) = (16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3)^{\frac{2}{3}}$$

und ebenso (B) und (14) die beiden Gleichungssysteme

$$\vartheta_3^2 - O_3^2 = \sqrt{\frac{\vartheta_3}{O_3}} \frac{(4O_0 O_2 O_3)^{\frac{5}{6}}}{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{1}{6}}}$$

$$\underline{(18)} \quad \vartheta_2^2 - O_2^2 = \sqrt{\frac{\vartheta_2}{O_2}} \frac{(4O_0 O_2 O_3)^{\frac{5}{6}}}{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{1}{6}}}$$

$$O_0^2 - \vartheta_0^2 = \sqrt{\frac{\vartheta_0}{O_0}} \frac{(4O_0 O_2 O_3)^{\frac{5}{6}}}{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{1}{6}}}$$

und

$$5O_3^2 - \vartheta_3^2 = \sqrt{\frac{O_3}{\vartheta_3}} \frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{3}{6}}}{(4O_0O_2O_3)^{\frac{1}{6}}}$$

$$(19)\quad 5O_0^2 - \vartheta_0^2 = \sqrt{\frac{O_0}{\vartheta_0}} \frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{5}{6}}}{(4O_0O_2O_3)^{\frac{1}{6}}}$$

$$\vartheta_2^2 - 5O_2^2 = \sqrt{\frac{O_2}{\vartheta_2}} \frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{5}{6}}}{(4O_0O_2O_3)^{\frac{1}{6}}}$$

Mit den Gleichungen (18) und (19) sind dann aber nach Göring auch die Systeme (20) und (22) unmittelbar gefunden.

Zum Schluss möchte ich noch eine andere Schreibweise der Relationen (21) anführen, welche uns unmittelbar zu einer von Gauss angegebenen, von Göring aber nicht erwähnten Formel führt. Fasst man die Glieder in den Formeln (21) in bestimmter Weise zusammen, so nimmt dieses System die Form an

(L)

$$\vartheta_0(\vartheta_2\vartheta_3 - O_2O_3) = O_0(\vartheta_2O_3 - \vartheta_3O_2); \quad O_0(\vartheta_2\vartheta_3 - 5O_2O_3) = \vartheta_0(\vartheta_2O_3 - \vartheta_3O_2)$$
$$\vartheta_2(\vartheta_0\vartheta_3 - O_0O_3) = O_2(\vartheta_0O_3 - \vartheta_3O_0); \quad O_2(\vartheta_0\vartheta_3 - 5O_0O_3) = \vartheta_2(\vartheta_0O_3 - \vartheta_3O_0)$$
$$\vartheta_3(\vartheta_0\vartheta_2 + O_0O_2) = O_3(\vartheta_0O_2 + \vartheta_2O_0); \quad O_3(\vartheta_0\vartheta_2 + 5O_0O_2) = \vartheta_3(\vartheta_0O_2 + \vartheta_2O_0)$$

und hieraus folgt unmittelbar

(N)
$$\vartheta_0^2(\vartheta_2\vartheta_3 - O_2O_3) = O_0^2(\vartheta_2\vartheta_3 - 5O_2O_3)$$
$$\vartheta_2^2(\vartheta_0\vartheta_3 - O_0O_3) = O_2^2(\vartheta_0\vartheta_3 - 5O_0O_3)$$
$$\vartheta_3^2(\vartheta_0\vartheta_2 + O_0O_2) = O_3^2(\vartheta_0\vartheta_2 + 5O_0O_2)$$

Mit Hülfe von (K) liefert uns ferner (L) folgendes Gleichungssystem:

(M)
$$(\vartheta_2\vartheta_3 - O_2O_3)^6 = 16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3O_0O_2O_3\frac{O_0^9}{\vartheta_0^3}$$
$$(O_0O_3 - \vartheta_0\vartheta_3)^6 = 16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3O_0O_2O_3\frac{O_2^9}{\vartheta_2^3}$$
$$(\vartheta_0\vartheta_2 + O_0O_2)^6 = 16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3O_0O_2O_3\frac{O_3^9}{\vartheta_3^3}$$
$$(\vartheta_2\vartheta_3 - 5O_2O_3)^6 = 16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3O_0O_2O_3\frac{\vartheta_0^9}{O_0^3}$$
$$(\vartheta_0\vartheta_3 - 5O_0O_3)^6 = 16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3O_0O_2O_3\frac{\vartheta_2^9}{O_2^3}$$
$$(\vartheta_0\vartheta_2 + 5O_0O_2)^6 = 16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3O_0O_2O_3\frac{\vartheta_3^9}{O_3^3}$$

Eine dieser Gleichungen giebt Gauss an (cf. Gauss Werke II 475), jedoch muss dort ein Versehen vorliegen, denn er giebt als Wert von $\vartheta_0\vartheta_2 + O_0O_2$ den, welchen wir für $\vartheta_0\vartheta_2 + 5O_0O_2$ haben.

Es ergeben sich also auch für den Fall $n = 5$ alle von Göring und Gauss angegebenen Formel nach unsrer Methode und ausserdem noch eine ganze Reihe andrer eleganter Beziehungen.

Nach diesen Ausführungen wird es einleuchten, wie lohnend der hier eingeschlagene Weg ist, um Relationen zwischen den transformirten Thetafunctionen aufzustellen, und offenbar erhält man für jeden Wert von n eine ganze Reihe von Beziehungen. Jedoch will ich für jetzt hier abbrechen, indem ich hoffe, dass es mir gelungen ist, die Fruchtbarkeit dieser Methode nach dieser Richtung hin nachzuweisen.

Abschnitt II.

§ 1.

Um die Beziehungen zwischen den Teilwerten der Thetafunctionen und den transformirten Thetafunctionen für das Argument 0 aufzustellen, müssen wir nur noch den drei Gleichungssystemen A eine dritte Form geben. Sucht man die n verschiedenen Wurzeln der rechten Seite, so ergiebt sich unmittelbar, dass man die Gleichung A_4) für den Fall $t = n$ auch so schreiben kann:

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\,\vartheta_1(nv, n\tau) = c\vartheta_1(v)\prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h\left(\vartheta_1{}^2(v)\vartheta_\alpha{}^2\left(\frac{h}{n}\right) - \vartheta_\alpha{}^2(v), \vartheta_1{}^2\left(\frac{h}{n}\right)\right)$$

wobei

$$c = \frac{x_1}{\prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h\,\vartheta_\alpha{}^2\left(\frac{h}{n}\right)}$$

ist.

Analog erhält man für den Fall $t = 1$

$$\vartheta_1\left(v, \frac{\tau - 8\xi}{n}\right) = c\vartheta_1(v)\prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h\left(\vartheta_1{}^2(v)\,\vartheta_\alpha{}^2\left(h\,\frac{\tau - 8\xi}{n}\right)\right.$$
$$\left. - \vartheta_\alpha{}^2(v)\vartheta_1{}^2\left(h\,\frac{\tau - 8\xi}{n}\right)\right)$$

wobei

$$c = \frac{x_1}{\prod_1^{\frac{n-1}{2}} h \vartheta_\alpha{}^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}$$

ist.

Diese Formeln ergeben sich auch als specielle Fälle aus den von Herrn Prof. Königsberger angegebenen (siehe Königsberger, Elliptische Functionen II Pag. 95 oder Transformation der elliptischen Functionen § 24).

Vermehrt man jetzt wieder um halbe Perioden von 1 und τ, so folgen für $t = n$ die drei Gleichungssysteme

$$I'$$

1) $$\vartheta_{\alpha_1}(nv, n\tau) =$$

$$c\vartheta_{\alpha_1}(v,\tau) \prod_1^{\frac{n-1}{2}} h \left(\vartheta_{\alpha_1}{}^2(v,\tau)\vartheta_{\alpha_1}{}^2\left(\frac{h}{n},\ \tau\right) \mp \vartheta_1{}^2(v,\tau)\vartheta_1{}^2\left(\frac{h}{n},\ \tau\right)\right)$$

2) $$\vartheta_{\alpha_2}(nv, n\tau) =$$

$$c\vartheta_{\alpha_2}(v,\tau) \prod_1^{\frac{n-1}{2}} h \left(\vartheta_{\alpha_2}{}^2(v,\tau)\vartheta_{\alpha_1}{}^2\left(\frac{h}{n},\ \tau\right) \mp \vartheta_{\alpha_3}{}^2(v,\tau)\vartheta_1{}^2\left(\frac{h}{n},\ \tau\right)\right)$$

3) $$\vartheta_{\alpha 3}(nv, n\tau) =$$

$$c\vartheta_{\alpha_3}(v,\tau) \prod_1^{\frac{n-1}{2}} h \left(\vartheta_{\alpha_3}{}^2(v,\tau)\vartheta_{\alpha_1}{}^2\left(\frac{h}{n},\ \tau\right) \mp \vartheta_{\alpha_2}{}^2(v,\tau)\vartheta_1{}^2\left(\frac{h}{n},\ \tau\right)\right)$$

4) $$(-1)^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_1(nv, n\tau) =$$

$$c\vartheta_1(v,\tau) \prod_1^{\frac{n-1}{2}} h \left(\vartheta_1{}^2(v,\tau)\vartheta_{\alpha_1}{}^2\left(\frac{h}{n},\ \tau\right) - \vartheta_{\alpha_1}{}^2(v,\tau)\vartheta_1{}^2\left(\frac{h}{n},\ \tau\right)\right)$$

wo die Indices α der Reihe nach wieder dieselben Werte annehmen wie bei A, und wo überall das negative Zeichen gültig ist ausser in den Fällen, wo bei A abwechselndes Zeichen zu nehmen ist, dann muss man hier das positive Zeichen wählen.

Ganz analoge Formeln erhält man für den Fall $t = 1$, nur tritt überall an Stelle von $\frac{h}{n}$ rechts $h\frac{\tau - 8\xi}{n}$ und links natürlich an Stelle von $\vartheta_\alpha(nv, n\tau)$, $\vartheta_\alpha\left(v, \frac{\tau - 8\xi}{n}\right)$; wir wollen diese Gleichungen hier nicht angeben, sie jedoch mit Γ'' bezeichnen.

§. 2.

Für die allgemeinen Betrachtungen sowohl wie für die speciellen Fälle wollen wir hier überall von vorne herein die Fälle $t = n$ und $t = 1$ unterscheiden, erstere liefern uns die Beziehungen für die Teilwerte der reellen Periode, und letztere die für die Teilwerte der imaginären Periode.

Bestimmt man zunächst die Coefficienten der Gleichungssysteme A durch die Wurzelwerte der Gleichungen, wie sie sich unmittelbar durch Vergleichung der Gleichungssysteme A und Γ ergeben, so erhält man für den Fall $t = n$:

$$x_1 = c \prod_1^{\frac{n-1}{2}} h \vartheta_\alpha{}^2 \left(\frac{h}{n}\right) = \frac{O_\alpha}{\vartheta_\alpha{}^n};$$

also

$$c = \frac{O_\alpha}{\vartheta_\alpha{}^n} \cdot \frac{1}{\prod_1^{\frac{n-1}{2}} h \vartheta_\alpha{}^2 \left(\frac{h}{n}\right)}$$

$$x_{\frac{n+1}{2}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot c \prod_1^{\frac{n-1}{2}} h \vartheta_1{}^2 \left(\frac{h}{n}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{O_\alpha}{\vartheta_\alpha{}^n} \prod_1^{\frac{n-1}{2}} h \frac{\vartheta_1{}^2 \left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_\alpha{}^2 \left(\frac{h}{n}\right)}$$

$$x_2 = - c \sum_1^{\frac{n-1}{2}} h \vartheta_\alpha{}^2 \left(\frac{1}{n}\right) \vartheta_\alpha{}^2 \left(\frac{2}{n}\right) \ldots \vartheta_\alpha{}^2 \left(\frac{h-1}{n}\right) \vartheta_1{}^2 \left(\frac{h}{n}\right) \vartheta_\alpha{}^2 \left(\frac{h+1}{n}\right) \ldots \vartheta_\alpha{}^2 \left(\frac{n-1}{2n}\right)$$

$$= - \frac{O_\alpha}{\vartheta_\alpha{}^n} \sum_1^{\frac{n-1}{2}} h \frac{\vartheta_1{}^2 \left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_\alpha{}^2 \left(\frac{h}{n}\right)} \quad \text{oder}$$

$$= - \frac{O_\alpha}{\vartheta_\alpha{}^n} \prod_1^{\frac{n-1}{2}} h \frac{\vartheta_1{}^2 \left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_\alpha{}^2 \left(\frac{h}{n}\right)} \sum_1^{\frac{n-1}{2}} h \frac{\vartheta_\alpha{}^2 \left(\frac{1}{n}\right) \ldots \vartheta_\alpha{}^2 \left(\frac{h-1}{n}\right) \vartheta_\alpha{}^2 \left(\frac{h+1}{n}\right) \ldots \vartheta_\alpha{}^2 \left(\frac{n-1}{2n}\right)}{\vartheta_1{}^2 \left(\frac{1}{n}\right) \ldots \vartheta_1{}^2 \left(\frac{h-1}{n}\right) \vartheta_1{}^2 \left(\frac{h+1}{n}\right) \ldots \vartheta_1{}^2 \left(\frac{n-1}{2n}\right)}$$

$$x_{\frac{n-1}{2}} = (-1)^{\frac{n-3}{2}} c \sum_1^{\frac{n-3}{2}} h \vartheta_1{}^2 \left(\frac{1}{n}\right) \vartheta_1{}^2 \left(\frac{2}{n}\right) \ldots \vartheta_1{}^2 \left(\frac{h-1}{n}\right) \vartheta_\alpha{}^2 \left(\frac{h}{n}\right) \vartheta_1{}^2 \left(\frac{h+1}{n}\right) \ldots$$

$$\ldots \vartheta_1{}^2 \left(\frac{n-1}{2n}\right) =$$

$$= (-1)^{\frac{n-3}{2}} \frac{O_\alpha}{\vartheta_\alpha{}^n} \sum_1^{\frac{n-1}{2}} \frac{\vartheta_1{}^2\left(\frac{1}{n}\right)\ldots\vartheta_1{}^2\left(\frac{h-1}{n}\right)\vartheta_1{}^2\left(\frac{h+1}{n}\right)\ldots\vartheta_1{}^2\left(\frac{n-1}{2n}\right)}{\vartheta_\alpha{}^2\left(\frac{1}{n}\right)\ldots\vartheta_\alpha{}^2\left(\frac{h-1}{n}\right)\vartheta_\alpha{}^2\left(\frac{h+1}{n}\right)\ldots\vartheta_\alpha{}^2\left(\frac{n-1}{2n}\right)}$$

$$= (-1)^{\frac{n-3}{2}} \frac{O_\alpha}{\vartheta_\alpha{}^n} \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \frac{\vartheta_1{}^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_\alpha{}^2\left(\frac{h}{n}\right)} \sum_1^{\frac{n-1}{2}} \frac{\vartheta_\alpha{}^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_1{}^2\left(\frac{h}{n}\right)}$$

$$x_3 = c \sum_{\substack{h=1\ k=2 \\ h=\frac{n-1}{2}\ k=\frac{n-1}{2}}}^{h,k} \vartheta_\alpha{}^2\left(\frac{1}{n}\right)\ldots\vartheta_\alpha{}^2\left(\frac{h-1}{n}\right)\vartheta_1{}^2\left(\frac{h}{n}\right)\vartheta_\alpha{}^2\left(\frac{h+1}{n}\right)\ldots$$

$$\ldots\vartheta_\alpha{}^2\left(\frac{k-1}{n}\right)\vartheta_1{}^2\left(\frac{k}{n}\right)\vartheta_\alpha{}^2\left(\frac{k+1}{n}\right)\ldots\vartheta_\alpha{}^2\left(\frac{n-1}{2n}\right)$$

$$= \frac{O_\alpha}{\vartheta_\alpha{}^n} \sum_{\substack{h=1\ k=2 \\ h=\frac{n-1}{2}\ k=\frac{n-1}{2}}}^{h,k} \frac{\vartheta_1{}^2\left(\frac{h}{n}\right)\vartheta_1{}^2\left(\frac{k}{n}\right)}{\vartheta_\alpha{}^2\left(\frac{h}{n}\right)\vartheta_\alpha{}^2\left(\frac{k}{n}\right)}$$

$$= \frac{O_\alpha}{\vartheta_\alpha{}^n} \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \frac{\vartheta_1{}^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_\alpha{}^2\left(\frac{h}{n}\right)} \sum_{\substack{h=1\ k-2 \\ h=\frac{n-1}{2}\ k=\frac{n-1}{2}}}^{h,k} \frac{\vartheta_\alpha{}^2\left(\frac{1}{n}\right)\ldots\vartheta_\alpha{}^2\left(\frac{h-1}{n}\right)\vartheta_\alpha{}^2\left(\frac{h+1}{n}\right)..}{\vartheta_1{}^2\left(\frac{1}{n}\right)\ldots\vartheta_1{}^2\left(\frac{h-1}{n}\right)\vartheta_1{}^2\left(\frac{h+1}{n}\right)\ldots}$$

$$\ldots\vartheta_\alpha{}^2\left(\frac{k-1}{n}\right)\vartheta_\alpha{}^2\left(\frac{k+1}{n}\right)\ldots\vartheta_\alpha{}^2\left(\frac{n-1}{2n}\right)$$

$$\ldots\vartheta_1{}^2\left(\frac{k-1}{n}\right)\vartheta_1{}^2\left(\frac{k+1}{n}\right)\ldots\vartheta_1{}^2\left(\frac{n-1}{2n}\right)$$

wo überall die Summe nach h und k zu nehmen ist, und für jeden Wert von h, k alle ganzzahligen Werte von $h+1$ bis $\frac{n-1}{2}$ durchlaufen muss; dasselbe gilt von den folgenden Ausdrücken

$$x_{\frac{n-3}{2}} = (-1)^{\frac{n-5}{2}} c \sum_{\substack{h-1\ k=2 \\ h=\frac{n-1}{2}\ k=\frac{n-1}{2}}}^{h,k} \vartheta_1{}^2\left(\frac{1}{n}\right)\ldots\vartheta_1{}^2\left(\frac{h-1}{n}\right)\vartheta_\alpha{}^2\left(\frac{h}{n}\right)\vartheta_1{}^2\left(\frac{h+1}{n}\right)\ldots$$

$$\ldots\vartheta_1{}^2\left(\frac{k-1}{n}\right)\vartheta_\alpha{}^2\left(\frac{k}{n}\right)\vartheta_1{}^2\left(\frac{k+1}{n}\right)\ldots\vartheta_1{}^2\left(\frac{n-1}{2n}\right)$$

$$= (-1)^{\frac{n-5}{2}} \frac{O_\alpha}{\vartheta_\alpha{}^n} \sum_{h=1\ k=2}^{h=\frac{n-1}{2}\ k=\frac{n-1}{2}} \frac{\vartheta_1{}^2\left(\frac{1}{n}\right)\ldots\vartheta_1{}^2\left(\frac{h-1}{n}\right)\vartheta_1{}^2\left(\frac{h+1}{n}\right)\ldots}{\vartheta_\alpha{}^2\left(\frac{1}{n}\right)\ldots\vartheta_\alpha{}^2\left(\frac{h-1}{n}\right)\vartheta_\alpha{}^2\left(\frac{h+1}{n}\right)\ldots}$$

$$\ldots\vartheta_1{}^2\left(\frac{k-1}{n}\right)\vartheta_1{}^2\left(\frac{k+1}{n}\right)\ldots\vartheta_1{}^2\left(\frac{n-1}{2n}\right)$$

$$\ldots\vartheta_\alpha{}^2\left(\frac{k-1}{n}\right)\vartheta_\alpha{}^2\left(\frac{k+1}{n}\right)\ldots\vartheta_\alpha{}^2\left(\frac{n-1}{2n}\right)$$

$$= (-1)^{\frac{n-5}{2}} \frac{O_\alpha}{\vartheta_\alpha{}^n} \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \frac{\vartheta_1{}^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_\alpha{}^2\left(\frac{h}{n}\right)} \sum_{h=1\ k=2}^{h=\frac{n-1}{2}\ k=\frac{n-1}{2}} \frac{\vartheta_\alpha{}^2\left(\frac{h}{n}\right)\vartheta_\alpha{}^2\left(\frac{k}{n}\right)}{\vartheta_1{}^2\left(\frac{h}{n}\right)\vartheta_1{}^2\left(\frac{k}{n}\right)}.$$

Ganz analoge Ausdrücke erhält man für den Fall $t = 1$, nur tritt überall an Stelle von $\frac{l}{n}$ $\frac{l(\tau - 8\xi)}{n}$.

Setzt man nun in diesen Formeln für die Coefficienten x_r die in Abschnitt I. §2. gefundenen Werte ein, so kann man jede dieser Summen resp. Producte der Teilwerte der Thetafunctionen durch die transformirten Thetafunctionen und jenen die zweiten Ableitungen derselben enthaltenden Ausdruck darstellen. Der Ausdruck für x_1 liefert so nichts Neues, wohl aber alle übrigen von $x_{\frac{n+1}{2}}$ ab. Man erhält so folgende merkwürdigen Relationen zwischen diesen Grössen:

a) durch den Coefficienten $x_{\frac{n+1}{2}}$.

α) für die imaginäre Periode.

$$\prod_1^{\frac{n-1}{2}} \frac{\vartheta_1{}^2\left(h \cdot \frac{\tau - 8\xi}{n}\right)}{\vartheta_0{}^2\left(h \cdot \frac{\tau - 8\xi}{n}\right)} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{O_2 O_3}{\vartheta_2 \vartheta_3}$$

$$\prod_1^{\frac{n-1}{2}} \frac{\vartheta_1{}^2\left(h \cdot \frac{\tau - 8\xi}{n}\right)}{\vartheta_2{}^2\left(h \cdot \frac{\tau - 8\xi}{n}\right)} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{O_0 O_3}{\vartheta_0 \vartheta_3}$$

$$\prod_1^{\frac{n-1}{2}} \frac{\vartheta_1{}^2\left(h \cdot \frac{\tau - 8\xi}{n}\right)}{\vartheta_3{}^2\left(h \cdot \frac{\tau - 8\xi}{n}\right)} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{O_0 O_2}{\vartheta_0 \vartheta_2}$$

Diese drei Gleichungen setzen uns in den Stand, sämmtliche von Herrn Dr. Göring für den allgemeinen Fall abgeleiteten Beziehungen zwischen den Teilwerten der imaginären Periode und den transformirten Thetafunctionen herzustellen, wenn wir nur die Gleichung hinzuziehen

$$2\vartheta_0(x,\tau)\vartheta_1(x,\tau)\vartheta_2(x,\tau)\vartheta_3(x,\tau) = \vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_1(2x,\tau)$$

Auch Herr Dr. Göring hat dieselbe benutzt und giebt sie § 1 (19) an, sie folgt unmittelbar aus der ersten Gleichung der Jacobi'schen Tabelle A (Jacobi's Werke I 507)

$$\vartheta_3(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z)\vartheta_3(v) + \vartheta_2(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z)\vartheta_2(v) =$$
$$\vartheta_3(x',y',z',v') + \vartheta_2(x',y',z',v')$$

wenn man $x = x - \frac{1}{2}$, $y = x - \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}$, $z = x + \frac{\tau}{2}$ und $u = x$ setzt.

Giebt man x der Reihe nach die Werte $\frac{\tau - 8\xi}{n}$, $2\frac{\tau-8\xi}{n}$, ... $\frac{n-1}{2}\frac{\tau-8\xi}{n}$ und multiplicirt alle diese Gleichungen, so folgt

$$2^{\frac{n-1}{2}} \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_0\left(h.\frac{\tau-8\xi}{n}\right) \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_1\left(h.\frac{\tau-8\xi}{n}\right) \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_2\left(h.\frac{\tau-8\xi}{n}\right) \times$$
$$\prod_1^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_3\left(h.\frac{\tau-8\xi}{n}\right) = (\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{n-1}{2}} \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_1\left(2h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)$$

Es ist nun aber, wenn $\frac{n-1}{2}$ eine gerade Zahl bezeichnet,

$$\prod_1^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_1\left(2h\frac{\tau-8\xi}{n}\right) = \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_1\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right) e^{-\frac{\pi i\tau}{n}\frac{(n+1).(n-1)}{8}} e^{2\pi i\xi\frac{(3n+1).(n-1)}{n}}$$

wie sich analog den Göring'schen Betrachtungen für den speciellen Fall $\xi = 0$ § 9 I leicht nachweisen lässt.

Ist dagegen $\frac{n-1}{2}$ eine ungerade Zahl, so erhält der letzte Factor die Form $e^{2\pi i\xi\frac{(3n-1).(3n+1)}{n}}$.

Man müsste demnach im Folgenden zwischen diesen zwei Fällen

unterscheiden, setzt man jedoch jetzt $\frac{\tau - 8\xi}{n} = \tau$, so ergiebt sich sowohl, wenn $\frac{n-1}{2}$ gerade ist, als auch, wenn es ungerade ist,

$$\prod_1^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_1(2h\tau, n\tau + 8\xi) = \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_1(h\tau, n\tau + 8\xi) e^{-\pi i \tau \frac{(n+1).(n-1)}{8}}$$

denn der letzte Factor nimmt dann in beiden Fällen die Form $e^{2\pi i m} = 1$ an.

Für den speciellen Wert $\xi = 0$ fällt diese Gleichung mit der Göring'schen § 9 I (5) zusammen.

Setzt man dies in der früheren Gleichung ein, so folgt

$$2^{\frac{n-1}{2}} \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_0(h\tau, n\tau + 8\xi) \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_2(h\tau, n\tau + 8\xi) \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_3(h\tau, n\tau + 8\xi) =$$

$$(\vartheta_0 \vartheta_2 \vartheta_3)^{\frac{n-1}{2}} e^{-\pi i \tau \frac{(n+1).(n-1)}{8}}$$

wo

$$\vartheta_\alpha = \vartheta_\alpha(0, n\tau + 8\xi)$$

ist; diese Formel schliesst wieder als speciellen Fall die Göring'sche § 9 I (6) in sich.

Nach den früheren Gleichungen können wir nun aber jedes der in der letzten Gleichung auftretenden Producte durch jedes andere ausdrücken, eliminirt man mithin zwei derselben, so bekommt man einen Ausdruck für das dritte Product und somit auch sofort die entsprechenden Werte der anderen Producte ausgedrückt in Thetafunctionen mit dem Argument 0.

Eliminiren wir z. B. die Producte der Teilwerte ϑ_2 und ϑ_3, so erhalten wir die Relation

$$2^{\frac{n-1}{2}} e^{\pi i \tau \frac{(n+1).(n-1)}{24}} \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_0(h\tau, n\tau + 8\xi) = \sqrt{\frac{O_0}{\vartheta_0}} \frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{n}{6}}}{(4O_0O_2O_3)^{\frac{1}{6}}}$$

oder

$$e^{\pi i \tau \frac{n+1.n-1}{24}} \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_0(h\tau, n\tau + 8\xi) = \sqrt{\frac{\vartheta_2\vartheta_3}{O_2O_3}} \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{n-3}{6}} \left(\frac{O_0O_2O_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

wobei

$$O_\alpha = \vartheta_\alpha(0, \tau), \quad \vartheta_\alpha = \vartheta_\alpha(0, n\tau + 8\xi)$$

ist.

Mit dieser Relation sind aber sofort auch die folgenden gefunden:

$$(-1)^{\frac{n-1}{4}} 2^{\frac{n-1}{2}} e^{\pi i\tau \frac{(n+1).(n-1)}{24}} \prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \vartheta_1(h\tau,\ n\tau+8\xi) = \sqrt{\frac{O_0O_2O_3}{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}} \frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{n}{6}}}{(4O_0O_2O_3)^{\frac{1}{6}}}$$

oder

$$(-1)^{\frac{n-1}{4}} e^{\pi i\tau \frac{(n+1).(n-1)}{24}} \prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \vartheta_1(h\tau,\ n\tau+8\xi) = \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{n-3}{6}} \left(\frac{O_0O_2O_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = A.$$

$$2^{\frac{n-1}{2}} e^{\pi i\tau \frac{(n+1).(n-1)}{24}} \prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \vartheta_2(h\tau,\ n\tau+8\xi) = \sqrt{\frac{O_2}{\vartheta_2}} \frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{n}{6}}}{(4O_0O_2O_3)^{\frac{1}{6}}}$$

oder

$$e^{\pi i\tau \frac{(n+1).(n-1)}{24}} \prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \vartheta_2(h\tau,\ n\tau+8\xi) = \sqrt{\frac{\vartheta_0\vartheta_3}{O_0O_3}}\ A.$$

$$2^{\frac{n-1}{2}} e^{\pi i\tau \frac{(n+1).(n-1)}{24}} \prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \vartheta_3(h\tau,\ n\tau+8\xi) = \sqrt{\frac{O_3}{\vartheta_3}} \frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{n}{6}}}{(4O_0O_2O_3)^{\frac{1}{6}}}$$

oder

$$e^{\pi i\tau \frac{(n+1).(n-1)}{24}} \prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \vartheta_3(h\tau,\ n\tau+8\xi) = \sqrt{\frac{\vartheta_0\vartheta_2}{O_0O_2}}\ A.$$

Diese Gleichungen repräsentiren uns für den speciellen Fall $\xi = 0$ genau die Gleichungssysteme von Göring § 9 2. (16) und (17), wenn wir beachten, dass unser $\vartheta_\alpha = \vartheta_\alpha(0, n\tau+8\xi)$ und $O_\alpha = \vartheta_\alpha(0, \tau)$, und dass $n = \alpha$ bei Göring, dagegen jenes $n = \frac{n-1}{2}$ ist.

β) für die reelle Periode.

Verfährt man in analoger Weise, wie für $t = 1$, für $t = n$, so erhält man unmittelbar die Göring'schen Gleichnngen § 9 3. (23) und (24):

(23)

$$2^{\frac{n-1}{2}} \prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \vartheta_1\left(\frac{h}{n},\ \tau\right) = \sqrt{5} \sqrt{\frac{O_0O_2O_3}{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}} \frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{n}{6}}}{(4O_0O_2O_3)^{\frac{1}{6}}}$$

$$2^{\frac{n-1}{2}} \prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \vartheta_0\left(\frac{h}{n},\ \tau\right) = \sqrt{\frac{O_0}{\vartheta_0}} \frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{n}{6}}}{(4O_0O_2O_3)^{\frac{1}{6}}}$$

(23)

$$2^{\frac{n-1}{2}} \prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} {}_h\vartheta_2\left(\frac{h}{n}, \tau\right) = \sqrt{\frac{O_2}{\vartheta_2}} \frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{n}{6}}}{(4O_0O_2O_3)^{\frac{1}{6}}}$$

$$2^{\frac{n-1}{2}} \prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} {}_h\vartheta_3\left(\frac{h}{n}, \tau\right) = \sqrt{\frac{O_3}{\vartheta_3}} \frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{n}{6}}}{(4O_0O_2O_3)^{\frac{1}{6}}}$$

oder, wenn man

$$\left(\frac{O_0O_2O_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{n-3}{6}} = B$$

setzt

$$\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} {}_h\vartheta_1\left(\frac{h}{n}, \tau\right) = \sqrt{n}\, B$$

$$\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} {}_h\vartheta_0\left(\frac{h}{n}, \tau\right) = \sqrt{\frac{\vartheta_2\vartheta_3}{O_2O_3}}\, B$$

(24)

$$\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} {}_h\vartheta_2\left(\frac{h}{n}, \tau\right) = \sqrt{\frac{\vartheta_0\vartheta_3}{O_0O_3}}\, B$$

$$\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} {}_h\vartheta_3\left(\frac{h}{n}, \tau\right) = \sqrt{\frac{\vartheta_0\vartheta_2}{O_0O_2}}\, B$$

Combinirt man diese Resultate noch mit denen der imaginären Periode, so ergeben sich ohne weiteres auch die Gleichungen (25) (26) und (27).

Wir haben damit nach unsrer Methode nicht nur sämmtliche Göring'schen Formeln für den allgemeinen Fall, dass n eine ungerade Zahl ist, gefunden, sondern auch noch wenigstens für die imaginäre Periode bedeutende Erweiterungen dieser Resultate.

Unsre Methode reicht jedoch noch viel weiter, wir erhalten völlig neue Relationen, wenn wir nun auch die Ausdrücke für die übrigen Coefficienten vergleichen, und zwar zunächst

b) die für die Coefficienten x_2 und $x_{\frac{n-1}{2}}$.

α) Für die imaginäre Periode ergeben sich so folgende Beziehungen:

$$\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_0^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)} = \frac{1}{2\pi^2\vartheta_2^2\vartheta_3^2}\left(n\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}-\frac{O_0''}{O_0}\right)$$

$$\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\vartheta_0^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}$$

$$= \frac{1}{6\vartheta_2^2\vartheta_3^2}\left\{\frac{3}{\pi^2}\left(n\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}-\frac{O_0''}{O_0}\right)-\left((\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)-(O_2^4+O_3^4)\right)\right\}$$

$$\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_2^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)} = \frac{1}{2\pi^2\vartheta_0^2\vartheta_3^2}\left(n\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}-\frac{O_2''}{O_2}\right)$$

$$\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\vartheta_2^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}$$

$$= \frac{1}{6\vartheta_0^2\vartheta_3^2}\left\{\frac{3}{\pi^2}\left(n\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}-\frac{O_2''}{O_2}\right)+\left((\vartheta_0^4+\vartheta_3^4)-(O_0^4+O_3^4)\right)\right\}$$

$$\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_3^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)} = -\frac{1}{2\pi^2\vartheta_0^2\vartheta_2^2}\left(n\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}-\frac{O_3''}{O_3}\right)$$

$$\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\vartheta_3^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}$$

$$= \frac{1}{6\vartheta_0^2\vartheta_2^2}\left\{\frac{3}{\pi^2}\left(n\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}-\frac{O_3''}{O_3}\right)-\left((\vartheta_0^4-\vartheta_2^4)-(O_0^4-O_2^4)\right)\right\}$$

Ganz ähnliche Ausdrücke ergeben sich für die Summen der Producte der Quotienten zu je $\frac{n-3}{2}$, wie sie in den dritten Werten für die Coefficienten x_2 und x_{n-1} enthalten sind. Da man diese jedoch direct aus den obigen erhält, wenn man respective mit

$$\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\vartheta_\alpha^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)} \text{ oder } \prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_\alpha^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}$$

multiplicirt und diese Pro-

ducte rechts nach a) durch die transformirten Thetafunctionen mit dem Argument 0 ausdrückt, so will ich sie hier nicht noch speciell angeben.

β) In gleicher Weise folgen für die reelle Periode folgende Relationen:

$$\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_0^2\left(\frac{h}{n}\right)} = -\frac{n}{2\pi^2\vartheta_2^2\vartheta_3^2}\left(n\frac{O_0''}{O_0} - \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\right)$$

$$\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\vartheta_0^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)} = -\frac{1}{6\vartheta_2^2\vartheta_3^2}\left\{\frac{3n}{\pi^2}\left(n\frac{O_0''}{O_0} - \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\right) - \left(n^2(O_2^4 + O_3^4) - (\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)\right)\right\}$$

$$\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_2^2\left(\frac{h}{n}\right)} = -\frac{n}{2\pi^2\vartheta_0^2\vartheta_3^2}\left(n\frac{O_2''}{O_2} - \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right)$$

$$\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\vartheta_2^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)} = -\frac{1}{6\vartheta_0^2\vartheta_3^2}\left\{\frac{3n}{\pi^2}\left(n\frac{O_2''}{O_2} - \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right) + \left(n^2(O_0^4 + O_3^4) - (\vartheta_0^4 + \vartheta_3^4)\right)\right\}$$

$$\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_3^2\left(\frac{h}{n}\right)} = \frac{n}{2\pi^2\vartheta_0^2\vartheta_2^2}\left(n\frac{O_3''}{O_3} - \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right)$$

$$\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\vartheta_3^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)} = -\frac{1}{6\vartheta_0^2\vartheta_2^2}\left\{\frac{3n}{\pi^2}\left(n\frac{O_3''}{O_3} - \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right) - \left(n^2(O_0^4 - O_2^4) - (\vartheta_0^4 - \vartheta_2^4)\right)\right\}$$

In diesen letzten sechs Gleichungen ist überall $O_\alpha = \vartheta_\alpha(0, n\tau)$ und $\vartheta_\alpha = \vartheta_\alpha(0, \tau)$, während in b)$_\alpha$) $O_\alpha = \vartheta_\alpha\left(0, \frac{\tau - 8\xi}{n}\right)$ und $\vartheta_\alpha = \vartheta_\alpha(0, \tau)$ ist.

Diese Formeln finden sich nicht mehr in der Göring'schen Abhandlung, wohl aber gelangt man durch Specialisirung der von Herrn Dr. Herstowski in seiner Inaugural-Dissertation § 3 (6)—(17) aufgestellten Relationen zu ganz ähnlichen, jedoch nicht mit diesen identischen Formeln. Es sind dies die schon von Herrn Prof. Kronecker angegebenen Formeln. — In obigen Gleichungen tritt ausser den Teilwerten der Thetafunctionen und den transformirten Thetafunctionen noch jener die zweiten Ableitungen derselben enthaltende Ausdruck auf. Diesen zu entfernen ist im Allgemeinen nicht möglich, wenigstens nicht auf dem hier eingeschlagenen Wege; für die speciellen Fälle jedoch können wir obige Summen rational durch die transformirten Thetafunctionen allein ausdrücken, da wir dann $t^2 \frac{O_\alpha''}{O_\alpha} - n \frac{\vartheta_\alpha''}{\vartheta_\alpha}$ durch diese Grössen darstellen können. Z. B. ist

für $n = 3$

$$3 \frac{\vartheta_0''(0, 3\tau)}{\vartheta_0(0, 3\tau)} - \frac{\vartheta_0''(0, \tau)}{\vartheta_0(0, \tau)} = -2\pi^2 \vartheta_2 \vartheta_3 O_2 O_3 = \ldots$$

für $n = 5$

$$5 \frac{\vartheta_0''(0, 5\tau)}{\vartheta_0(0, 5\tau)} - \frac{\vartheta_0''(0, \tau)}{\vartheta_0(0, \tau)} = \frac{1}{15} \pi^2 \{25(O_2^4 + O_3^4) - (\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)\} = \ldots$$

Können wir nun auch die einzelnen Summen nicht allein durch Thetafunctionen mit dem Argument 0 ausdrücken, so können wir doch Relationen zwischen diesen Summen aufstellen, in denen ausserdem nur noch Thetafunctionen mit dem Argument 0 auftreten. Ich will mich hier auf die der reellen Periode und auf die der imaginären Periode beschränken, in denen die Teilwerte derselben zwei Thetafunctionen vorkommen, und auf solche zwischen der reellen und imaginären Periode unter einander, für die ein gleiches statt hat. Offenbar kann man auch zwischen allen übrigen Relationen aufstellen, was unmittelbar klar ist, wenn man bedenkt, dass die Gleichungen bestehen

$$\left(n \frac{\vartheta_3''(0, n\tau)}{\vartheta_3(0, n\tau)} - \frac{\vartheta_3''(0, \tau)}{\vartheta_3(0, \tau)}\right) = \left(n \frac{\vartheta_0''(0, n\tau)}{\vartheta_0(0, n\tau)} - \frac{\vartheta_0''(0, \tau)}{\vartheta_0(0, \tau)}\right)$$
$$- \pi^2 (n O_2^4 - \vartheta_2^4), \text{ etc.}$$

Man findet so durch Elimination der zweiten Ableitungen folgende Beziehungen:

$$\sum_1^{\frac{n-1}{2}} \frac{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_0^2\left(\frac{h}{n}\right)} - \sum_1^{\frac{n-1}{2}} \frac{\vartheta_0^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)} = -\frac{1}{6\vartheta_2^2\vartheta_3^2}\{n^2(O_2^4 + O_3^4) - (\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)\}$$

$$\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_2^2\left(\frac{h}{n}\right)} - \sum_{1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\vartheta_2^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)} = \frac{1}{6\vartheta_0^2\vartheta_3^2}\{n^2(O_0^4 + O_3^4) - (\vartheta_0^4 + \vartheta_3^4)\}$$

$$\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_3^2\left(\frac{h}{n}\right)} + \sum_{1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\vartheta_3^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)} = \frac{1}{6\vartheta_0^2\vartheta_2^2}\{n^2(O_0^4 - O_2^4) - (\vartheta_0^4 - \vartheta_2^4)\}$$

wobei

$$O_\alpha = \vartheta_\alpha(0, n\tau) \quad \text{und} \quad \vartheta_\alpha = \vartheta_\alpha(0, \tau)$$

ist; ferner

$$\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_0^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)} - \sum_{1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\vartheta_0^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}$$

$$= \frac{1}{6\vartheta_2^2\vartheta_3^2}\{(\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4) - (O_2^4 + O_3^4)\}$$

$$\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_2^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)} - \sum_{1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\vartheta_2^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}$$

$$= -\frac{1}{6\vartheta_0^2\vartheta_3^2}\{(\vartheta_0^4 + \vartheta_3^4) - (O_0^4 + O_3^4)\}$$

$$\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_3^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)} + \sum_{1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\vartheta_3^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}$$

$$= -\frac{1}{6\vartheta_0^2\vartheta_2^2}\{(\vartheta_0^4 - \vartheta_2^4) - (O_0^4 - O_2^4)\}$$

wo

$$O_\alpha = \vartheta_\alpha\left(0, \frac{\tau-8\xi}{n}\right), \quad \vartheta_\alpha = \vartheta_\alpha(0, \tau)$$

ist.

Um nun Beziehungen zwischen den Summen der Teilwerte der reellen und imaginären Periode für $\xi = 0$ herzustellen, müssen wir noch in den Gleichungen für die imaginäre Periode statt $\frac{\tau}{n}$ τ einführen; dann nehmen die in denselben auftretenden Ausdrücke die Form an, es wird

$$\vartheta_\alpha\left(h\frac{\tau}{n}, \tau\right) = \vartheta_\alpha(h\tau, n\tau), \quad O_\alpha = \vartheta_\alpha(0, \tau) \quad \text{und} \quad \vartheta_\alpha = \vartheta_\alpha(0, n\tau)$$

Es ist dann also O_α der imaginären Periode gleich, ϑ_α der reellen Periode und ϑ_α der imaginären Periode gleich, O_α der reellen. Vertauscht man deshalb in den Ausdrücken der imaginären Periode O_α und ϑ_α und eliminirt dann $n\frac{O_\alpha''}{O_\alpha} - \frac{\vartheta_\alpha''}{\vartheta_\alpha}$, so erhält man

$$\sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_1^2(h\tau, n\tau)}{\vartheta_0^2(h\tau, n\tau)} = -\frac{\vartheta_2^2\vartheta_3^2}{nO_2^2O_3^2} \sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}, \tau\right)}{\vartheta_0^2\left(\frac{h}{n}, \tau\right)}$$

$$\vartheta_2^2\vartheta_3^2 \sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_0^2\left(\frac{h}{n}, \tau\right)}{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}, \tau\right)} + nO_2^2O_3^2 \sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_0^2(h\tau, n\tau)}{\vartheta_1^2(h\tau, n\tau)}$$

$$= \frac{n-1}{6}\{n(O_2^4 + O_3^4) + (\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)\}$$

und analog für die andern Summen.

c) Gehen wir jetzt noch einen Schritt weiter und untersuchen, welche Relationen sich aus der Vergleichung der Ausdrücke für die Coefficienten x_3 und $x_{\frac{n-3}{2}}$ ergeben, so erhalten wir

α) für die imaginäre Periode.

$$\Sigma_{h,k} \frac{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)\vartheta_1^2\left(k\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_0^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)\vartheta_0^2\left(k\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}$$

$$= \frac{1}{\vartheta_2^4\vartheta_3^4}\left\{\frac{1}{8\pi^4}\left(\frac{O_0''}{O_0} - n\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\right)^2 + \frac{\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4}{6\pi^2}\left(\frac{O_0''}{O_0} - n\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\right)\right.$$

$$\left. - \frac{1}{12}(O_2^4O_3^4 - n\vartheta_2^4\vartheta_3^4)\right\}$$

$$\Sigma_{h,k} \frac{\vartheta_0^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)\vartheta_0^2\left(k\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)\vartheta_1^2\left(k\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}$$

$$= \frac{1}{\vartheta_2^4\vartheta_3^4}\left\{\frac{1}{8\pi^4}\left(\frac{O_0''}{O_0} - n\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\right)^2 - \frac{(O_2^4 + O_3^4) - 3(\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)}{12\pi^2}\left(\frac{O_0''}{O_0} - n\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\right)\right.$$

$$- \frac{1}{12}(\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)[(O_2^4 + O_3^4) - (\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)]$$

$$\left. - \frac{1}{120}[(O_2^8 + 4O_2^4O_3^4 + O_3^8) - (\vartheta_2^8 + (10n-6)\vartheta_2^4\vartheta_3^4 + \vartheta_3^8)]\right\}$$

$$\Sigma_{h,k} \frac{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)\vartheta_1^2\left(k\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_2^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)\vartheta_2^2\left(k\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}$$

$$= \frac{1}{\vartheta_0^4\vartheta_3^4}\left\{\frac{1}{8\pi^4}\left(\frac{O_2''}{O_0}-n\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right)^2-\frac{\vartheta_0^4+\vartheta_3^4}{6\pi^2}\left(\frac{O_2''}{O_2}-n\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{12}(O_0^4O_3^4-n\vartheta_0^4\vartheta_3^4)\right\}$$

$$\Sigma_{h,k} \frac{\vartheta_2^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)\vartheta_2^2\left(k\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)\vartheta_1^2\left(k\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}$$

$$= \frac{1}{\vartheta_0^4\vartheta_3^4}\left\{\frac{1}{8\pi^4}\left(\frac{O_2''}{O_2}-n\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right)^2+\frac{(O_0^4+O_3^4)-3(\vartheta_0^4+\vartheta_3^4)}{12\pi^2}\left(\frac{O_2''}{O_2}-n\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right)\right.$$

$$-\frac{1}{12}(\vartheta_0^4+\vartheta_3^4)[(O_0^4+O_3^4)-(\vartheta_0^4+\vartheta_3^4)]$$

$$\left.-\frac{1}{120}[(O_0^8+4O_0^4O_3^4+O_3^8)-(\vartheta_0^8+(10n-6)\vartheta_0^4\vartheta_3^4+\vartheta_3^8)]\right\}$$

$$\Sigma_{h,k} \frac{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)\vartheta_1^2\left(k\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_3^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)\vartheta_3^2\left(k\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}$$

$$= \frac{1}{\vartheta_0^4\vartheta_2^4}\left\{\frac{1}{8\pi^4}\left(\frac{O_3''}{O_3}-n\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right)^2+\frac{\vartheta_0^4-\vartheta_2^4}{6\pi^2}\left(\frac{O_3''}{O_3}-n\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{12}(O_0^4O_2^4-n\vartheta_0^4\vartheta_2^4)\right\}$$

$$\Sigma_{h,k} \frac{\vartheta_3^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)\vartheta_3^2\left(k\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)\vartheta_1^2\left(k\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}$$

$$= \frac{1}{\vartheta_0^4\vartheta_2^4}\left\{\frac{1}{8\pi^4}\left(\frac{O_3''}{O_3}-n\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right)^2-\frac{(O_0^4-O_2^4)-3(\vartheta_0^4-\vartheta_2^4)}{12\pi^2}\left(\frac{O_3''}{O_3}-n\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right)\right.$$

$$-\frac{1}{12}(\vartheta_0^4-\vartheta_2^4)[(O_0^4-O_2^4)-(\vartheta_0^4-\vartheta_2^4)]$$

$$\left.-\frac{1}{120}[(O_0^8-4O_0^4O_2^4+O_2^8)-(\vartheta_0^8-(10n-6)\vartheta_0^4\vartheta_2^4+\vartheta_2^8)]\right\}$$

Ganz analoge Formeln ergeben sich für die Summe der Producte zu je $\frac{n-5}{2}$ nach den dritten Ausdrücken für die Coefficienten x_3 und $x_{\frac{n-3}{2}}$,

dieselben unterscheiden sich von den obigen nur durch die Factoren vor den gewundenen Klammern und entstehen aus ihnen einfach durch Multiplication mit $\Pi_h \dfrac{\vartheta_\alpha{}^2\left(h\dfrac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_1{}^2\left(h\dfrac{\tau-8\xi}{n}\right)}$ resp. $\Pi_h \dfrac{\vartheta_1{}^2\left(h\dfrac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_\alpha{}^2\left(h\dfrac{\tau-8\xi}{n}\right)}$.

In allen obigen Gleichungen ist die Summe nach h und k zu nehmen von 1 bis $\dfrac{n-1}{2}$ und zwar muss k für jeden Wert von h alle Werte von $h+1$ bis $\dfrac{n-1}{2}$ durchlaufen; ferner bedeutet überall $O_\alpha\ \vartheta_\alpha\left(0,\ \dfrac{\tau-8\xi}{n}\right)$, $\vartheta_\alpha\ \vartheta_\alpha(0,\ \tau)$.

β) Auch die Beziehungen für die reelle Periode haben eine ganz ähnliche Form, und will ich mich deshalb damit begnügen, die zwei ersten anzugeben:

$$\Sigma_{h,k} \frac{\vartheta_1{}^2\left(\frac{h}{n}\right)\vartheta_1{}^2\left(\frac{k}{n}\right)}{\vartheta_0{}^2\left(\frac{h}{n}\right)\vartheta_0{}^2\left(\frac{k}{n}\right)}$$

$$= \frac{1}{\vartheta_2{}^4\vartheta_3{}^4}\left\{\frac{n^2}{8\pi^4}\left(n\frac{O_0''}{O_0}-\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\right)^2+n\frac{\vartheta_2{}^4+\vartheta_3{}^4}{6\pi^2}\left(n\frac{O_0''}{O_0}-\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{n}{12}(n^3O_2{}^4O_3{}^4-\vartheta_2{}^4\vartheta_3{}^4)\right\}$$

$$\Sigma_{h,k} \frac{\vartheta_0{}^2\left(\frac{h}{n}\right)\vartheta_0{}^2\left(\frac{k}{n}\right)}{\vartheta_1{}^2\left(\frac{h}{n}\right)\vartheta_1{}^2\left(\frac{k}{n}\right)}$$

$$= \frac{1}{\vartheta_2{}^4\vartheta_3{}^4}\left\{\frac{n^2}{8\pi^4}\left(n\frac{O_0''}{O_0}-\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\right)^2\right.$$

$$-n\frac{n^2(O_2{}^4+O_3{}^4)-3(\vartheta_2{}^4+\vartheta_3{}^4)}{12\pi^2}\left(n\frac{O_0''}{O_0}-\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\right)$$

$$-\frac{1}{12}(\vartheta_2{}^4+\vartheta_3{}^4)\left[n^2(O_2{}^4+O_3{}^4)-(\vartheta_2{}^4+\vartheta_3{}^4)\right]$$

$$\left.-\frac{1}{120}\left[n^4(O_2{}^8+4O_2{}^4O_3{}^4+O_3{}^8)-(\vartheta_2{}^8+(10n-6)\vartheta_2{}^4\vartheta_3{}^4+\vartheta_3{}^8)\right]\right\}$$

Diese Formeln oder auch ihnen ähnliche habe ich nirgends gefunden.

Legt man dieselben nun wieder als Ausgangsgleichungen zu

Grunde, so kann man aus ihnen wieder eine Menge Relationen herleiten, welche die Beziehungen zwischen diesen Summen unter sich und zwischen diesen und den früheren Summen angeben.

Diese alle aufzustellen, würde jedoch zu weit führen, und will ich hier nur je eine für die reelle und imaginäre Periode vorführen, um zu zeigen, wie sich dieselben gestalten. Es ist z. B.

$$\Sigma_{h,k} \frac{\vartheta_2{}^2\left(\frac{h}{n}\right)\vartheta_2{}^2\left(\frac{k}{n}\right)}{\vartheta_1{}^2\left(\frac{h}{n}\right)\vartheta_1{}^2\left(\frac{k}{n}\right)} - \Sigma_{h,k} \frac{\vartheta_1{}^2\left(\frac{h}{n}\right)\vartheta_1{}^2\left(\frac{k}{n}\right)}{\vartheta_2{}^2\left(\frac{h}{n}\right)\vartheta_2{}^2\left(\frac{k}{n}\right)}$$

$$= \frac{1}{\vartheta_0{}^4\vartheta_3{}^4}\left\{n\frac{n^2(O_0{}^4+O_3{}^4)-(\vartheta_0{}^4+\vartheta_3{}^4)}{12\pi^2}\left(n\frac{O_2''}{O_0}-\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right)\right.$$

$$-\frac{1}{12}(\vartheta_0{}^4+\vartheta_3{}^4)\left[n^2(O_0{}^4+O_3{}^4)-(\vartheta_0{}^4+\vartheta_3{}^4)\right]$$

$$\left.-\frac{1}{120}\left[n^2(O_0{}^8-6O_0{}^4O_3{}^4+O_3{}^8)-(\vartheta_0{}^8-6\vartheta_0{}^4\vartheta_3{}^4+\vartheta_3{}^8)\right]\right\}$$

$$\Sigma_{h,k} \frac{\vartheta_2{}^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)\vartheta_2{}^2\left(k\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_1{}^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)\vartheta_1{}^2\left(k\frac{\tau-8\xi}{n}\right)} - \Sigma_{h,k} \frac{\vartheta_1{}^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)\vartheta_1{}^2\left(k\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_2{}^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)\vartheta_2{}^2\left(k\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}$$

$$= \frac{1}{\vartheta_0{}^4\vartheta_3{}^4}\left\{\frac{(O_0{}^4+O_3{}^4)-(\vartheta_0{}^4+\vartheta_3{}^4)}{12\pi^2}\left(\frac{O_2''}{O_2}-n\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right)\right.$$

$$-\frac{1}{12}(\vartheta_0{}^4+\vartheta_3{}^4)\left[(O_0{}^4+O_3{}^4)-(\vartheta_0{}^4+\vartheta_3{}^4)\right]$$

$$\left.-\frac{1}{120}\left[(O_0{}^8-6O_0{}^4O_3{}^4+O_3{}^8)-(\vartheta_0{}^8-6\vartheta_0{}^4\vartheta_3{}^4+\vartheta_3{}^8)\right]\right\}$$

Hier treten also schon in diese Beziehungen die zweiten Ableitungen der Thetafunctionen ein. Nimmt man aber noch die früheren Summen hinzu, so kann man dieselben auch hieraus eliminiren und bekommt dann rationale Beziehungen zwischen zweien dieser letzteren Summen, einer der früheren und den transformirten Thetafunctionen mit dem Argument 0. Man kann die zweiten Ableitungen aber auch allein durch eine oder mehrere der früheren Summen eliminiren und so rationale Beziehungen zwischen einer von diesen Summen und einer oder mehreren der früheren herstellen.

In gleicher Weise könnte man nun weiter gehen und die Coefficienten x_4 und $x_{\frac{n-5}{2}}$, x_5 und $x_{\frac{n-7}{2}}$, ... auf zweifache Weise ausdrücken, und würde so zu Summen von Producten zu je 3 oder je

$\frac{n-5}{2}$, zu je 4 oder je $\frac{n-7}{2}$, ... der Quotienten der Teilwerte gelangen immer ausgedrückt durch die Thetafunctionen für die Nullwerte des Arguments und zunächst durch Potenzen von $t^2 \frac{O_\alpha''}{O_\alpha} - n\frac{\vartheta_\alpha''}{\vartheta_\alpha}$; da man diese aber stets mit Hülfe der früheren und der gleichartigen Summen eliminiren kann, wird man alle Summen, zu denen man gelangt, rational durch alle gleichartigen und niederen Summen und die transformirten Thetafunctionen ausdrücken können.

Fassen wir schliesslich Alles zusammen, so ergiebt sich:

1) Allgemein kann man nur die Producte der $\frac{n-1}{2}$ verschiedenen Teilwerte der Thetafunctionen durch die Thetafunctionen selbst mit dem Argument 0 ausdrücken.

2) Rationale Beziehungen zwischen gleichartigen Summen, nur in Thetafunctionen mit dem Argument 0 ausgedrückt, kann man lediglich für die Summen, welche man aus den Coefficienten x_2 und $x_{\frac{n-1}{2}}$ erhält, aufstellen.

3) Alle höheren Summen kann man durch alle niederen Summen und die Thetafunctionen für das Argument 0 rational darstellen, hierbei können auch Summen gleich hohen Grades auftreten, jedoch nicht ausschliesslich.

§ 3.

Für den speciellen Fall $n = 3$ erhalten wir die wichtigsten Formeln unmittelbar durch Specialisirung der allgemeinen, und zwar kommt hier nur die erste Reihe der allgemeinen Untersuchungen in Betracht, die sich auf die Coefficienten x_1 und $x_{\frac{n+1}{2}} = x_2$ beziehen.

Specialisirt man so die Formeln § 2. a)$_\alpha$, so folgen die Beziehungen für die imaginäre Periode

$$\sqrt{-1}e^{\frac{1}{3}\pi i\tau}\,\vartheta_1(\tau, 3\tau + 8\xi) = \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$e^{\frac{1}{3}\pi i_\tau}\,\vartheta_0(\tau, 3\tau + 8\xi) = \sqrt{\frac{O_2O_3}{\vartheta_2\vartheta_3}}\left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

§ 2. (11)$_{1-4}$.

§ 2. $(11)_{1-4}$.

$$e^{\frac{1}{3}\pi i\tau}\,\vartheta_2(\tau,\ 3\tau+8\xi) = \sqrt{\frac{O_0 O_3}{\vartheta_0\vartheta_3}}\left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$e^{\frac{1}{3}\pi i\tau}\,\vartheta_3(\tau,\ 3\tau+8\xi) = \sqrt{\frac{O_0 O_2}{\vartheta_0\vartheta_2}}\left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

wobei

$$O_\alpha = \vartheta_\alpha(0,\ 3\tau+8\xi) \quad \text{und} \quad \vartheta_\alpha = \vartheta_\alpha(0,\ \tau)$$

ist. Für $\xi = 0$ sind diese Gleichungen mit den ersten vier Gleichungen Göring § 2. (11) identisch.

In gleicher Weise folgen aus § 2. a)$_\beta$) für $n = 3$.

$$\vartheta_1(\tfrac{1}{3},\ \tau) = \sqrt{3}\left(\frac{O_0 O_2 O_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\vartheta_0(\tfrac{1}{3},\ \tau) = \sqrt{\frac{\vartheta_2\vartheta_3}{O_2 O_3}}\left(\frac{O_0 O_2 O_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$(11)_{5-8}$

$$\vartheta_2(\tfrac{1}{3},\ \tau) = \sqrt{\frac{\vartheta_0\vartheta_3}{O_0 O_3}}\left(\frac{O_0 O_2 O_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\vartheta_3(\tfrac{1}{3},\ \tau) = \sqrt{\frac{\vartheta_0\vartheta_2}{O_0 O_2}}\left(\frac{O_0 O_2 O_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Zu diesen Gleichungen gelangt man für diesen speciellen Fall $n = 3$ auch, wenn man statt der Jacobi'schen Gleichungen Tabelle (A), welche ja bei den allgemeinen Betrachtungen hinzugezogen sind, die der Tabelle (C) zu Hülfe nimmt. Setzt man dort in den Gleichungen 6, 4 und 2 $x = y = \frac{1}{3}$ resp. $= \dfrac{\tau - 8\xi}{3}$ und eliminirt dann nach den Gleichungen für die Quotienten der Producte der Teilwerte, welche sich in dem Fall $n = 3$ auf Quotienten zweier einfachen Teilwerte reduciren, eine der Grössen $\vartheta_\alpha(\frac{1}{3})$ resp. $\vartheta_\alpha\left(\dfrac{\tau - 8\xi}{3}\right)$, so ergeben sich zunächst die auch nicht ganz unsymmetrischen Formeln:

$$\sqrt{-1}\,e^{\frac{\pi i\tau}{3}}\,\vartheta_1(\tau,\ 3\tau) = O_0\,\frac{\vartheta_2^{\frac{1}{2}}\vartheta_3^{\frac{1}{2}}O_2^{\frac{1}{6}}O_3^{\frac{1}{6}}}{(\vartheta_2^{2}\vartheta_3^{2} - O_2^{2}O_3^{2})^{\frac{1}{3}}}$$

$$e^{\frac{\pi i\tau}{3}}\,\vartheta_0(\tau,\ 3\tau) = O_0\,\frac{O_2^{\frac{2}{3}}O_3^{\frac{2}{3}}}{(\vartheta_2^{2}\vartheta_3^{2} - O_2^{2}O_3^{2})^{\frac{1}{3}}}$$

$$e^{\frac{\pi i\tau}{3}}\,\vartheta_2(\tau,\ 3\tau) = \frac{\vartheta_2^{\frac{1}{2}}}{\vartheta_0^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{O_0^{\frac{3}{2}}O_2^{\frac{1}{6}}O_3^{\frac{2}{3}}}{(\vartheta_2^{2}\vartheta_3^{2} - O_2^{2}O_3^{2})^{\frac{1}{3}}}$$

$$e^{\frac{\pi i\tau}{3}}\,\vartheta_3(\tau,\ 3\tau) = \frac{\vartheta_3^{\frac{1}{2}}}{\vartheta_0^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{O_0^{\frac{3}{2}}O_2^{\frac{2}{3}}O_3^{\frac{1}{6}}}{(\vartheta_2^{2}\vartheta_3^{2} - O_2^{2}O_3^{2})^{\frac{1}{3}}}$$

und ähnliche Formeln für die reelle Periode. Mit Hülfe der Gleichungen Abschnitt I. § 3. (G) reduciren sie sich unmittelbar auf die obigen.

Mit dem Gleichungssystem (11) sind nun aber auch sofort die Systeme (8) und (10) gefunden, sie entstehen ja ohne weiteres durch Multiplication der Gleichung für $\vartheta_1(\tau, 3\tau)$ resp. $\vartheta_1(\frac{1}{3}, \tau)$ mit den übrigen Gleichungen derselben Periode; ferner folgt auch unmittelbar (9), denn setzt man in dem Ausdruck für $\vartheta_1(\frac{1}{3}, \tau)$ für τ $\frac{\tau}{3}$, so erhält man

$$\vartheta_1\left(\frac{1}{3}, \frac{\tau}{3}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

woraus sofort klar ist, dass die Beziehung stattfindet

$$(9) \quad \vartheta_1\left(\frac{1}{3} \; \frac{\tau}{3}\right) = i\sqrt{3}\, e^{\frac{\pi i \tau}{3}} \vartheta_1(\tau, 3\tau).$$

Auch das Gleichungssystem (5) kann man als eine Folgerung des Systems (11) ansehen; denn bildet man $\vartheta_0 . \vartheta_0(\tau, 3\tau) + \vartheta_3 . \vartheta_3(\tau, 3\tau)$ so ergiebt sich nach Göring § 3. $(1)_1$ die Beziehung

$$(5)_1 \quad \vartheta_0 . \vartheta_0(\tau, 3\tau) + \vartheta_3 . \vartheta_3(\tau, 3\tau) = \vartheta_2 . \vartheta_2(\tau, 3\tau)$$

und ebenso ergiebt sich nach § 3. $(1)_2$

$$(5)_2 \quad O_2 . \vartheta_2(\tfrac{1}{3}) + O_3 . \vartheta_3(\tfrac{1}{3}) = O_0 . \vartheta_0(\tfrac{1}{3})$$

Multiplicirt man ferner Göring § 2. $(5)_1$ mit $\vartheta_1^2(\tau, 3\tau)$ und setzt die Werte nach § 2 (8) ein, so kommt

$$(7) \quad \vartheta_0^2\sqrt{\vartheta_2\vartheta_3 O_2 O_3} + \vartheta_3^2\sqrt{\vartheta_0\vartheta_2 O_0 O_2} = \vartheta_2^2\sqrt{\vartheta_0\vartheta_3 O_0 O_3}$$

und eine analoge Formel erhält man, wenn man § 2. $(5)_2$ mit $\vartheta_1^2(\frac{1}{3})$ multiplicirt und nach (10) einsetzt:

$$O_2^2\sqrt{\vartheta_0\vartheta_3 O_0 O_3} + O_3^2\sqrt{\vartheta_0\vartheta_2 O_0 O_2} = O_0^2\sqrt{\vartheta_2\vartheta_3 O_2 O_3}$$

Hiermit sind aber sämmtliche für uns in Betracht kommende Göring'schen Beziehungen für $n = 3$ gefunden.

§ 4.

Für den speciellen Fall $n = 5$ kommen von den allgemeinen Untersuchungen die in Betracht, welche sich auf die Coefficienten $x_{\frac{n+1}{2}} = x_3$, x_2 und $x_{\frac{n-1}{2}} = x_2$ beziehen, und es folgen die ersten der

Göring'schen Formeln wieder einfach durch Specialisirung der allgemeinen und zwar

a) der, welche wir durch $x_{\frac{n+1}{2}} = x_3$ mit Hülfe des Jacobi'schen Gleichungssystemes (A) erhielten. Für den speciellen Fall $n = 5$ hätten wir auch statt dessen die Jacobi'sche Tabelle (B) hinzuziehen können, es ergeben sich auch dann ganz einfache Beziehungen ähnlich denen, welche wir bei $n = 3$ angegeben haben; jedoch da man dieselben auch aus den durch Specialisirung der allgemeinen resultirenden erhalten kann, wenn man sie durch das Gleichungssystem Abschnitt I. § 4. (M) umformt, und da die letzteren noch etwas einfacher sind, will ich mich hier begnügen diese anzugeben. Sie lauten folgendermassen:

α) für dic imaginäre Periode:

$$-4e^{\pi i\tau}\vartheta_1(\tau, 5\tau+8\xi)\vartheta_1(2\tau, 5\tau+8\xi) = \sqrt{\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{O_0O_2O_3}}\frac{(4O_0O_2O_3)^{\frac{5}{6}}}{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{1}{6}}}$$

oder

$$= (16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0O_2O_3)^{\frac{1}{2}}$$

Göring § 4. (12) und (8), nach (13)

$$= \sqrt{2}\sqrt{\vartheta_3^2O_3^2 - \vartheta_0^2O_0^2 - \vartheta_2^2O_2^2}$$

Göring § 4. (9)

$$= \ldots \text{ nach Abschnitt I. § 4.}$$

$$4e^{\pi i\tau}\vartheta_0(\tau, 5\tau+8\xi)\vartheta_0(2\tau, 5\tau+8\xi) = \sqrt{\frac{\vartheta_0}{O_0}}\frac{(4O_0O_2O_3)^{\frac{5}{6}}}{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{1}{6}}} = O_0^2 - \vartheta_0^2$$

$(18)_2$ und $(3)_2$

$$= \sqrt{\frac{O_2O_3}{\vartheta_2\vartheta_3}}(16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3O_0O_2O_3)^{\frac{1}{3}}$$

$$4e^{\pi i\tau}\vartheta_2(\tau, 5\tau+8\xi)\vartheta_2(2\tau, 5\tau+8\xi) = \sqrt{\frac{\vartheta_2}{O_2}}\frac{(4O_0O_2O_3)^{\frac{5}{6}}}{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{1}{6}}} = (\vartheta_2^2 - O_2^2)$$

$(18)_3$ und $(3)_3$

$$= \sqrt{\frac{O_0O_3}{\vartheta_0\vartheta_3}}(16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3O_0O_2O_3)^{\frac{1}{3}}$$

$$4e^{\pi i\tau}\vartheta_3(\tau, 5\tau+8\xi)\vartheta_3(2\tau, 5\tau+8\xi) = \sqrt{\frac{\vartheta_3}{O_3}}\frac{(4O_0O_2O_3)^{\frac{5}{6}}}{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{1}{6}}} = \vartheta_3^2 - O_3^2$$

$(18)_1$ und $(3)_1$

$$= \sqrt{\frac{O_0O_2}{\vartheta_0\vartheta_2}}(16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3O_0O_2O_3)^{\frac{1}{3}}$$

β) für die reelle Periode.

$$4\vartheta_1(\tfrac{1}{5})\vartheta_1(\tfrac{2}{5}) = \sqrt{5}\sqrt{\frac{O_0O_2O_3}{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}}\frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{5}{6}}}{(4O_0O_2O_3)^{\frac{1}{6}}}$$
$$= \sqrt{5}(16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3O_0O_2O_3)^{\frac{1}{3}}$$
$$= \sqrt{5}\sqrt{2\vartheta_3{}^2O_3{}^2 - 2\vartheta_0{}^2O_0{}^2 - 2\vartheta_2{}^2O_2{}^2} = \ldots$$

$$4\vartheta_0(\tfrac{1}{5})\vartheta_0(\tfrac{2}{5}) = \sqrt{\frac{O_0}{\vartheta_0}}\frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{5}{6}}}{(4O_0O_2O_3)^{\frac{1}{6}}} = 5O_0{}^2 - \vartheta_0{}^2 \qquad \underline{(19)_2} \text{ und } \underline{(5^b)_2}$$
$$= \sqrt{\frac{\vartheta_2\vartheta_3}{O_2O_3}}(16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3O_0O_2O_3)^{\frac{1}{3}}$$

$$4\vartheta_2(\tfrac{1}{5})\vartheta_2(\tfrac{2}{5}) = \sqrt{\frac{O_2}{\vartheta_2}}\frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{5}{6}}}{(4O_0O_2O_3)^{\frac{1}{6}}} = \vartheta_2{}^2 - 5O_2{}^2 \qquad \underline{(19)_3} \text{ und } \underline{(5^b)_3}$$
$$= \sqrt{\frac{\vartheta_0\vartheta_3}{O_0O_3}}(16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3O_0O_2O_3)^{\frac{1}{3}}$$

$$4\vartheta_3(\tfrac{1}{5})\vartheta_3(\tfrac{2}{5}) = \sqrt{\frac{O_3}{\vartheta_3}}\frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{5}{6}}}{(4O_0O_2O_3)^{\frac{1}{6}}} = 5O_3{}^2 - \vartheta_3{}^2 \qquad \underline{(19)_1} \text{ und } \underline{(5^b)_1}$$
$$= \sqrt{\frac{\vartheta_0\vartheta_2}{O_0O_2}}(16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3O_0O_2O_3)^{\frac{1}{3}}$$

Ferner folgen noch unmittelbar durch Vergleichung der reellen und imaginären Periode für $\xi = 0$ unter einander

$$\vartheta_1(\tfrac{1}{5})\vartheta_1(\tfrac{2}{5}) = -\sqrt{5}\,e^{\pi i\tau}\vartheta_1(\tau, 5\tau)\vartheta_1(2\tau, 5\tau) \qquad \underline{(6)}$$

$$\vartheta_0(\tfrac{1}{5})\vartheta_0(\tfrac{2}{5}) = \frac{\vartheta_2\vartheta_3}{O_2O_3}e^{\pi i\tau}(\vartheta_0(\tau, 5\tau)\vartheta_0(2\tau, 5\tau)$$

$$\vartheta_2(\tfrac{1}{5})\vartheta_2(\tfrac{2}{5}) = \frac{\vartheta_0\vartheta_3}{O_0O_3}e^{\pi i\tau}\vartheta_2(\tau, 5\tau)\vartheta_2(2\tau, 5\tau)$$

$$\vartheta_3(\tfrac{1}{5})\vartheta_3(\tfrac{2}{5}) = \frac{\vartheta_0\vartheta_2}{O_0O_2}e^{\pi i\tau}\vartheta_3(\tau, 5\tau)\vartheta_3(2\tau, 5\tau)$$

Hier bedeutet überall ϑ_α $\vartheta_\alpha(0, \tau)$ und O_α $\vartheta_\alpha(0, 5\tau)$, ebenso oben in β), während in α) O_α allgemein gleich $\vartheta_\alpha(0, 5\tau + 8\xi)$ ist.

Ferner folgen aus der Form der obigen Gleichungen, welche Göring unter (3) und (5) angiebt, die zwischen (5^a) und (5^b) angegebenen Formeln:

$$\vartheta_0(\tfrac{1}{5}, \tau)\vartheta_0(\tfrac{2}{5}, \tau) = O_0{}^2 + e^{\pi i\tau}\vartheta_0(\tau, 5\tau)\vartheta_0(2\tau, 5\tau)$$
$$-\vartheta_2(\tfrac{1}{5}, \tau)\vartheta_2(\tfrac{2}{5}, \tau) = O_2{}^2 - e^{\pi i\tau}\vartheta_2(\tau, 5\tau)\vartheta_2(2\tau, 5\tau)$$
$$\vartheta_3(\tfrac{1}{5}, \tau)\vartheta_3(\tfrac{2}{5}, \tau) = O_3{}^2 - e^{\pi i\tau}\vartheta_3(\tau, 5\tau)\vartheta_3(2\tau, 5\tau)$$

Hiermit sind sämmtliche uns interessirenden Formeln, die Göring in § 4. angiebt, auf unserm Wege gefunden.

b) Wir gehen deshalb jetzt dazu über die Formeln zu betrachten, welche sich durch den Coefficienten x_2 ergeben. Diese könnten wir nun auch unmittelbar durch Specialisirung aus den allgemeinen ableiten, und es würden sich jedenfalls die Ausdrücke für $\Sigma\frac{\vartheta_1^{\,2}(-1)}{\vartheta_\alpha^{\,2}(-1)}$ sehr gut dazu eignen, um analog dem im Folgenden eingeschlagenen Verfahren die einzelnen Teilwerte zu berechnen; ich habe dies jedoch schon ausgeführt, bevor ich die allgemeinen Untersuchungen anstellte, und dabei hauptsächlich die Gleichungen Abschnitt I. § 4. (2) und (3) benutzt, also Gleichungen, welche für den allgemeinen Fall nicht anwendbar sind. Die Resultate müssen ja schliesslich dieselben sein, wenigstens muss man sie mit Hülfe der für $n = 5$ zwischen den transformirten Thetafunctionen aufgestellten Beziehungen auf einander reduciren können. Mein Verfahren war nun folgendes:

α) für die reelle Periode.

Zunächst combinirte ich jene Gleichungen (2) und (3) und eleminirte daraus den Coefficienten x_3 — man könnte allerdings auch eine dieser Gleichungen zu Grunde legen, jedoch bietet die Combination den Vorzug, dass die Resultate dann von vorn herein symmetrischer werden — ; hierdurch ergiebt sich zwischen x_2 und x_1 die Relation

$$\vartheta_2^{\,2}\vartheta_3^{\,2}O_0x_2 = x_1\{\vartheta_3^{\,3}(\vartheta_0O_3-\vartheta_3O_0)-\vartheta_2^{\,3}(\vartheta_0O_2+\vartheta_2O_0)\}$$

oder nach Abschnitt I. § 4. (H)

$$= -x_1(\vartheta_0O_2+\vartheta_2O_0)\sqrt{\vartheta_2\,O_2}\left(\sqrt{\frac{\vartheta_3^{\,5}}{O_3}}+\sqrt{\frac{\vartheta_2^{\,5}}{O_2}}\right)$$

Setzt man hierin für x_2 und x_1 die Wurzelwerte ein, so folgt

$$\vartheta_0^{\,2}(\tfrac{1}{5})\vartheta_1^{\,2}(\tfrac{2}{5})+\vartheta_1^{\,2}(\tfrac{1}{5})\vartheta_0^{\,2}(\tfrac{2}{5})$$

$$= \vartheta_0^{\,2}(\tfrac{1}{5})\vartheta_0^{\,2}(\tfrac{2}{5})\frac{\sqrt{\vartheta_2\vartheta_3O_2O_3}}{\vartheta_2^{\,2}\vartheta_3^{\,2}O_0}(16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3O_0O_2O_3)^{\frac{1}{6}}\left(\sqrt{\frac{\vartheta_3^{\,5}}{O_3}}+\sqrt{\frac{\vartheta_2^{\,5}}{O_2}}\right)$$

oder wenn man für $\vartheta_0^{\,2}(\frac{1}{5})\vartheta_0^{\,2}(\frac{2}{5})$ nach a) seinen Wert einsetzt,

$$\vartheta_0^{\,2}(\tfrac{1}{5})\vartheta_1^{\,2}(\tfrac{2}{5})+\vartheta_1^{\,2}(\tfrac{1}{5})\vartheta_0^{\,2}(\tfrac{2}{5}) = \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3O_0O_2O_3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{\vartheta_0}{O_0}}\left(\sqrt{\frac{\vartheta_3^{\,5}}{O_3}}+\sqrt{\frac{\vartheta_2^{\,5}}{O_2}}\right)$$

Würde man diesen Ausdruck quadriren und $4\vartheta_0^{\,2}(\frac{1}{5})\vartheta_0^{\,2}(\frac{2}{5}).\vartheta_1^{\,2}(\frac{1}{5})\vartheta_1^{\,2}(\frac{2}{5})$ auf beiden Seiten subtrahiren, so würde man auch für die Differenz $\vartheta_0^{\,2}(\frac{1}{5})\vartheta_1^{\,2}(\frac{2}{5})-\vartheta_1^{\,2}(\frac{1}{5})\vartheta_0^{\,2}(\frac{2}{5})$ einen Wert in transformirten Thetafunctio-

nen erhalten und somit auch einen Ausdruck für die einzelnen Glieder. Diese Differenz erhält man aber noch leichter durch die Gleichung 8. der Jacobi'schen Tabelle (C), wenn man $x = \frac{1}{5}$, $y = \frac{2}{5}$ setzt. Man bekommt so unmittelbar

$$\vartheta_0^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_1^2(\tfrac{2}{5}) - \vartheta_1^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_0^2(\tfrac{2}{5}) = \vartheta_0^2\vartheta_1^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_1(\tfrac{2}{5})$$
$$= \sqrt{5}\vartheta_0^2\left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich unmittelbar addendo und substrahendo

$$\left.\begin{aligned} 2\vartheta_0^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_1^2(\tfrac{2}{5}) &= \\ 2\vartheta_1^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_0^2(\tfrac{2}{5}) &= \end{aligned}\right\}$$
$$= \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{\vartheta_0}{O_0}} \left\{ \sqrt{\frac{\vartheta_3^5}{O_3}} + \sqrt{\frac{\vartheta_2^5}{O_2}} \pm \sqrt{5}\sqrt{\vartheta_0^3 O_0} \right\}$$

oder wenn man die Klammer mit Hülfe der Gleichungssysteme Göring § 4 (18) und (19) umformt

$$= \tfrac{1}{4} \sqrt{\frac{\vartheta_2\vartheta_3}{O_2 O_3}} \frac{\vartheta_0}{O_0} \{\vartheta_3^2(\vartheta_3^2 - O_3^2) + \vartheta_2^2(\vartheta_2^2 - O_2^2) \pm \sqrt{5}\vartheta_0 O_0(O_0^2 - \vartheta_0^2)\}$$

In gleicher Weise erhält man aus den Gleichungssystemen II. und III.

$$\vartheta_2^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_1^2(\tfrac{2}{5}) + \vartheta_1^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_2^2(\tfrac{2}{5}) = \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{\vartheta_2}{O_2}} \left\{ \sqrt{\frac{\vartheta_3^5}{O_3}} - \sqrt{\frac{\vartheta_0^5}{O_0}} \right\}$$

$$\vartheta_2^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_1^2(\tfrac{2}{5}) - \vartheta_1^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_2^2(\tfrac{2}{5}) = \sqrt{5}\vartheta_2^2\left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\left.\begin{aligned} 2\vartheta_2^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_1^2(\tfrac{2}{5}) &= \\ 2\vartheta_1^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_2^2(\tfrac{2}{5}) &= \end{aligned}\right\}$$
$$= \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{\vartheta_2}{O_2}} \left\{ \sqrt{\frac{\vartheta_3^5}{O_3}} - \sqrt{\frac{\vartheta_0^5}{O_0}} \pm \sqrt{5}\sqrt{\vartheta_2^3 O_2} \right\}$$

oder

$$= \tfrac{1}{4} \sqrt{\frac{\vartheta_0\vartheta_3}{O_0 O_3}} \frac{\vartheta_2}{O_2} \{\vartheta_3^2(\vartheta_3^2 - O_3^2) - \vartheta_0^2(O_0^2 - \vartheta_0^2) \pm \sqrt{5}\vartheta_2 O_2(\vartheta_2^2 - O_2^2)\}$$

und

$$\vartheta_3^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_1^2(\tfrac{2}{5}) + \vartheta_1^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_3^2(\tfrac{2}{5}) = \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{\vartheta_3}{O_3}} \left(\sqrt{\frac{\vartheta_0^5}{O_0}} + \sqrt{\frac{\vartheta_2^5}{O_2}} \right)$$

$$\vartheta_3^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_3^2(\tfrac{2}{5}) - \vartheta_1^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_3^2(\tfrac{2}{5}) = \sqrt{5}\vartheta_3^2\left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\left.\begin{aligned} 2\vartheta_3^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_1^2(\tfrac{2}{5}) &= \\ 2\vartheta_1^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_3^2(\tfrac{2}{5}) &= \end{aligned}\right\}$$
$$= \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{\vartheta_3}{O_3}} \left\{ \sqrt{\frac{\vartheta_0^5}{O_0}} + \sqrt{\frac{\vartheta_2^5}{O_2}} \pm \sqrt{5}\sqrt{\vartheta_3^3 O_3} \right\}$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{\vartheta_0\vartheta_2}{O_0O_2}}\frac{\vartheta_3}{O_3}\left\{\vartheta_0^2(O_0^2-\vartheta_0^2)+\vartheta_2^2(\vartheta_2^2-O_2^2)\pm\sqrt{5}\vartheta_3O_3(\vartheta_3^2-O_3^2)\right\}$$

Um nun die Werte der einzelnen Teilwerte zu erhalten, ziehen wir die schon im allgemeinen Fall benutzte Gleichung hinzu:

$$2\vartheta_0(x,\tau)\vartheta_1(x,\tau)\vartheta_2(x,\tau)\vartheta_3(x,\tau) = \vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_1(2x,\tau).$$

Giebt man x den Wert $\frac{1}{5}$ und quadrirt, so folgt eine Gleichung, die man auch so schreiben kann

$$\tfrac{1}{2}.2\vartheta_0^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_1^2(\tfrac{2}{5}).\vartheta_1^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_1^2(\tfrac{2}{5}).2\vartheta_2^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_1^2(\tfrac{2}{5}).2\vartheta_3^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_1^2(\tfrac{2}{5})=\vartheta_0^2\vartheta_2^2\vartheta_3^2\vartheta_1^{10}(\tfrac{2}{5})$$

eine ganz analoge Formel, die hieraus entsteht, wenn man nur die Argumente $\frac{1}{5}$ und $\frac{2}{5}$ vertauscht, ergiebt sich, wenn man x den Wert $\frac{2}{5}$ giebt. Setzt man in diesen Gleichungen links die oben gefundenen Werte ein, so folgt unmittelbar

$$\left.\begin{matrix}\vartheta_1^{10}(\frac{1}{5})=\\ \vartheta_1^{10}(\frac{2}{5})=\end{matrix}\right\} = \frac{5}{8}\left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{7}{6}}\left(\frac{O_0O_2O_3}{2}\right)^{\frac{1}{6}}\left(\sqrt{\frac{\vartheta_3^5}{O_3}}+\sqrt{\frac{\vartheta_2^5}{O_2}}\mp\sqrt{5}\sqrt{\vartheta_0^3O_0}\right)$$
$$\times\left(\sqrt{\frac{\vartheta_3^5}{O_3}}-\sqrt{\frac{\vartheta_0^5}{O_0}}\mp\sqrt{5}\sqrt{\vartheta_2^3O_2}\right)\left(\sqrt{\frac{\vartheta_0^5}{O_0}}+\sqrt{\frac{\vartheta_2^5}{O_2}}\mp\sqrt{5}\sqrt{\vartheta_3^3O_3}\right)$$

oder

$$= \frac{5}{128}\frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{2}{3}}}{(4O_0O_2O_3)^{\frac{4}{3}}}\{\vartheta_3^2(\vartheta_3^2-O_3^2)+\vartheta_2^2(\vartheta_2^2-O_2^2)\mp\sqrt{5}\vartheta_0O_0(O_0^2-\vartheta_0^2)\}$$
$$\times\{\vartheta_3^2(\vartheta_3^2-O_3^2)-\vartheta_0^2(O_0^2-\vartheta_0^2)\mp\sqrt{5}\vartheta_2O_2(\vartheta_2^2-O_2^2)\}$$
$$\times\{\vartheta_0^2(O_0^2-\vartheta_0^2)+\vartheta_2^2(\vartheta_2^2-O_2^2)\mp\sqrt{5}\vartheta_3O_3(\vartheta_3^2-O_3^2)\}$$

Hieraus ergeben sich nun unmittelbar nach den früheren Gleichungen auch die Werte für die übrigen Teilwerte und zwar ist

$$\left.\begin{matrix}2^5\vartheta_0^{10}(\frac{1}{5})=\\ 2^5\vartheta_0^{10}(\frac{2}{5})=\end{matrix}\right\} = \tfrac{2}{5}(\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{3}{2}}(O_0O_2O_3)^{\frac{1}{2}}\frac{\vartheta_0^{\frac{5}{2}}}{O_0^{\frac{5}{2}}}$$
$$\times\frac{\left(\sqrt{\frac{\vartheta_3^5}{O_3}}+\sqrt{\frac{\vartheta_2^5}{O_2}}\pm\sqrt{5}\sqrt{\vartheta_0^3O_0}\right)^4}{\left(\sqrt{\frac{\vartheta_3^5}{O_3}}-\sqrt{\frac{\vartheta_0^5}{O_0}}\pm\sqrt{5}\sqrt{\vartheta_2^3O_2}\right)\left(\sqrt{\frac{\vartheta_0^5}{O_0}}+\sqrt{\frac{\vartheta_2^5}{O_2}}\pm\sqrt{5}\sqrt{\vartheta_3^3O_3}\right)}$$

$$= \frac{1}{5\,8}\frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{11}{6}}}{(4O_0O_2O_3)^{\frac{7}{6}}}\frac{\vartheta_0^{\frac{5}{2}}}{O_0^{\frac{5}{2}}}$$
$$\times\frac{\{\vartheta_3^2(\vartheta_3^2-O_3^2)+\vartheta_2^2(\vartheta_2^2-O_2^2)\pm\sqrt{5}\vartheta_0O_0(O_0^2-\vartheta_0^2)\}^4}{(\vartheta_3^2(\vartheta_3^2-O_3^2)-\vartheta_0^2(O_0^2-\vartheta_0^2)\pm\sqrt{5}\vartheta_2O_2(\vartheta_2^2-O_2^2))\times}$$
$$(\vartheta_0^2(O_0^2-\vartheta_0^2)+\vartheta_2^2(\vartheta_2^2-O_2^2)\pm\sqrt{5}.\vartheta_3O_3(\vartheta_3^2-O_3^2))$$

$$\left.\begin{matrix} 2^5\vartheta_2{}^{10}(\frac{1}{5}) = \\ 2^5\vartheta_2{}^{10}(\frac{2}{5}) = \end{matrix}\right\} = \tfrac{2}{5}(\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{3}{2}}(O_0O_2O_3)^{\frac{1}{2}}\frac{\vartheta_2{}^{\frac{5}{2}}}{O_2{}^{\frac{5}{2}}}\times$$

$$\frac{\left(\sqrt{\frac{\vartheta_3{}^5}{O_3}}-\sqrt{\frac{\vartheta_0{}^5}{O_0}}\pm\sqrt{5}\sqrt{\vartheta_2{}^3O_2}\right)^4}{\left(\sqrt{\frac{\vartheta_3{}^5}{O_3}}+\sqrt{\frac{\vartheta_2{}^5}{O_2}}\pm\sqrt{5}\sqrt{\vartheta_0{}^3\vartheta_0}\right)\left(\sqrt{\frac{\vartheta_0{}^5}{O_0}}+\sqrt{\frac{\vartheta_2{}^5}{O_2}}\pm\sqrt{5}\sqrt{\vartheta_3{}^3O_3}\right)}$$

oder

$$= \frac{1}{5.8}\frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{11}{6}}}{(4O_0O_2O_3)^{\frac{7}{6}}}\frac{\vartheta_2{}^{\frac{5}{2}}}{O_2{}^{\frac{5}{2}}}$$

$$\times\frac{\{\vartheta_3{}^2(\vartheta_3{}^2-O_3{}^2)-\vartheta_0{}^2(O_0{}^2-\vartheta_0{}^2)\pm\sqrt{5}\vartheta_2O_2(\vartheta_2{}^2-O_2{}^2)\}^4}{(\vartheta_3{}^2(\vartheta_3{}^2-O_3{}^2)+\vartheta_2{}^2(\vartheta_2{}^2-O_2{}^2)\pm\sqrt{5}\vartheta_0O_0(O_0{}^2-\vartheta_0{}^2))\times}$$
$$(\vartheta_0{}^2(O_0{}^2-\vartheta_0{}^2)+\vartheta_2{}^2(\vartheta_2{}^2-O_2{}^2)\pm\sqrt{5}\vartheta_3O_3(\vartheta_3{}^2-O_3{}^2))$$

$$\left.\begin{matrix} 2^5\vartheta_3{}^{10}(\frac{1}{5}) = \\ 2^5\vartheta_3{}^{10}(\frac{2}{5}) = \end{matrix}\right\} = \tfrac{2}{5}(\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{3}{2}}(O_0O_2O_3)^{\frac{1}{2}}\frac{\vartheta_3{}^{\frac{5}{2}}}{O_3{}^{\frac{5}{2}}}\times$$

$$\frac{\left(\sqrt{\frac{\vartheta_0{}^5}{O_0}}+\sqrt{\frac{\vartheta_2{}^5}{O_2}}\pm\sqrt{5}\sqrt{\vartheta_3{}^3O_3}\right)^4}{\left(\sqrt{\frac{\vartheta_3{}^5}{O_3}}+\sqrt{\frac{\vartheta_2{}^5}{O_2}}\pm\sqrt{5}\sqrt{\vartheta_0{}^3O_0}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{\vartheta_3{}^5}{O_3}}-\sqrt{\frac{\vartheta_0{}^5}{O_0}}\pm\sqrt{5}\sqrt{\vartheta_2{}^3O_2}\right)}$$

oder

$$= \frac{1}{5.8}\frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{11}{6}}}{(4O_0O_2O_3)^{\frac{7}{6}}}\frac{\vartheta_3{}^{\frac{5}{2}}}{O_3{}^{\frac{5}{2}}}$$

$$\times\frac{\{\vartheta_0{}^2(O_0{}^2-\vartheta_0{}^2)+\vartheta_2{}^2(\vartheta_2{}^2-O_2{}^2)\pm\sqrt{5}\vartheta_3O_3(\vartheta_3{}^2-O_3{}^2)\}^4}{(\vartheta_3{}^2(\vartheta_3{}^2-O_3{}^2)+\vartheta_2{}^2(\vartheta_2{}^2-O_2{}^2)\pm\sqrt{5}\vartheta_0O_0(O_0{}^2-\vartheta_0{}^2))\times}$$
$$(\vartheta_3{}^2(\vartheta_3{}^2-O_3{}^2)-\vartheta_0{}^2(O_0{}^2-\vartheta_0{}^2))\pm\sqrt{5}\vartheta_2O_2(\vartheta_2{}^2-O_2{}^2))$$

β) In gleicher Weise ergeben sich für die imaginäre Periode folgende Relationen:

Ich will dieselben hier nur in der letzten Form angeben und zwar folgende Bezeichnungen einführen

$O_3{}^2(5O_3{}^2-\vartheta_3{}^2)-O_2{}^2(\vartheta_2{}^2-5O_2{}^2)\pm\vartheta_0O_0(5O_0{}^2-\vartheta_0{}^2)$ resp. $= A'$ od. A''
$O_0{}^2(5O_0{}^2-\vartheta_0{}^2)+O_3{}^2(5O_3{}^2-\vartheta_3{}^2)\pm\vartheta_2O_2(\vartheta_2{}^2-5O_2{}^2)$ resp. $= B'$ od. B''
$O_0{}^2(5O_0{}^2-\vartheta_0{}^2)+O_2{}^2(\vartheta_2{}^2-5O_2{}^2)\pm\vartheta_3O_3(5O_3{}^2-\vartheta_3{}^2)$ resp. $= C'$ od. C''

wobei für A', B' und C' das obere Zeichen gilt und für A'', B'' und C'' das untere.

Wir erhalten so folgende einfache Gleichungen:

$$-2e^{2\pi i\tau}\vartheta_0{}^2(\tau, 5\tau)\vartheta_1{}^2(2\tau, 5\tau) = \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{O_2O_3}{\vartheta_2\vartheta_3}}\frac{O_0}{\vartheta_0}A'$$

$$-2e^{2\pi i\tau}\vartheta_1{}^2(\tau, 5\tau)\vartheta_0{}^2(2\tau, 5\tau) = \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{O_2O_3}{\vartheta_2\vartheta_3}}\,\frac{O_0}{\vartheta_0}\,A''$$

$$-2e^{2\pi i\tau}\vartheta_2{}^2(\tau, 5\tau)\vartheta_1{}^2(2\tau, 5\tau) = \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{O_0O_3}{\vartheta_0\vartheta_3}}\,\frac{O_2}{\vartheta_2}\,B'$$

$$-2e^{2\pi i\tau}\vartheta_1{}^2(\tau, 5\tau)\vartheta_2{}^2(2\tau, 5\tau) = \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{O_0O_3}{\vartheta_0\vartheta_3}}\,\frac{O_2}{\vartheta_2}\,B''$$

$$-2e^{2\pi i\tau}\vartheta_3{}^2(\tau, 5\tau)\vartheta_1{}^2(2\tau, 5\tau) = \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{O_0O_2}{\vartheta_0\vartheta_2}}\,\frac{O_3}{\vartheta_3}\,C'$$

$$-2e^{2\pi i\tau}\vartheta_1{}^2(\tau, 5\tau)\vartheta_3{}^2(2\tau, 5\tau) = \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{O_0O_2}{\vartheta_0\vartheta_2}}\,\frac{O_3}{\vartheta_3}\,C''$$

ferner

$$e^{8\pi i\tau}\vartheta_1{}^{10}(\tau, 5\tau) = -\frac{1}{128}\,\frac{(4O_0O_2O_3)^{\frac{2}{3}}}{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{4}{3}}}\,A''.B''.C''$$

$$2^5e^{2\pi i\tau}\vartheta_0{}^{10}(\tau, 5\tau) = \frac{1}{8}\,\frac{(4O_0O_2O_3)^{\frac{11}{6}}}{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{7}{6}}}\,\frac{O_0{}^{\frac{5}{2}}}{\vartheta_0{}^{\frac{5}{2}}}\,\frac{A'^4}{B'.C'}$$

$$2^5e^{2\pi i\tau}\vartheta_2{}^{10}(\tau, 5\tau) = \frac{1}{8}\,\frac{(4O_0O_2O_3)^{\frac{11}{6}}}{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{7}{6}}}\,\frac{O_2{}^{\frac{5}{2}}}{\vartheta_2{}^{\frac{5}{2}}}\,\frac{B'^4}{A'.C'}$$

$$2^5e^{2\pi i\tau}\vartheta_3{}^{10}(\tau, 5\tau) = \frac{1}{8}\,\frac{(4O_0O_2O_3)^{\frac{11}{6}}}{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{7}{6}}}\,\frac{O_3{}^{\frac{5}{2}}}{\vartheta_3{}^{\frac{5}{2}}}\,\frac{C'^4}{A'.B'}$$

Ganz analoge Ausdrücke erhält man für $\vartheta_\alpha(2\tau, 5\tau)$, dieselben unterscheiden sich von diesen nur dadurch, dass, wo hier X' steht dort X'' stehen muss und umgekehrt.

Von allen diesen Beziehungen, welche wir streng nach unserer Methode erhalten haben, findet sich bei Göring keine einzige, und es ist auch das schliessliche Resultat für die einzelnen Teilwerte bei ihm ein anderes als das unsrige. Jedenfalls aber wird man unsere Ausdrücke auf eine der vier von Göring angegebenen verschiedenen Formen reduciren können. Jedoch würde es sehr umständlich sein auf diese Weise aus unsren Gleichungen die Göring'schen abzuleiten; ich versuchte daher, ob ich nicht dadurch, dass ich in den Gleichungssystemen Γ dem Argument x bestimmte Werte beilegte, direct die Bemühungen herleiten könnte, die Göring in § 5 angiebt, jedoch waren alle diese Bemühungen ohne Erfolg; ich fand dabei aber, dass man mit Hülfe der in a) aufgestellten Relationen sehr einfach aus den Formeln der Jacobi'schen Tabelle (C) diese Beziehungen erhält, wie folgt:

Setzt man in der funfzehnten Gleichung der Jacobi'schen Tabelle (C) $x = \frac{2}{5}$, $y = \frac{1}{5}$, so nimmt sie die Gestalt an

$$2\vartheta_0\vartheta_3\vartheta_3(\tfrac{1}{5})\vartheta_0(\tfrac{2}{5}) = \vartheta_0(\tfrac{1}{5})\vartheta_0(\tfrac{2}{5}).\vartheta_3(\tfrac{1}{5})\vartheta_3(\tfrac{2}{5}) + \vartheta_1(\tfrac{1}{5})\vartheta_1(\tfrac{2}{5}).\vartheta_2(\tfrac{1}{5})\vartheta_2(\tfrac{2}{5})$$

Setzen wir rechts für die Producte $\vartheta_\alpha(\frac{1}{5}).\vartheta_\alpha(\frac{2}{5})$ die Werte ein, so ergiebt sich

$$4\vartheta_3(\tfrac{1}{5})\vartheta_0(\tfrac{2}{5}) = \sqrt{\frac{\vartheta_2}{O_2}}\,(16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3)^{\frac{1}{6}}(\vartheta_2 + \sqrt{5}O_2)$$

oder nach Abschnitt I. § 4. (H)

$$\underline{(5)_1} \quad = (\sqrt{5}O_0 - \vartheta_0)(\sqrt{5}O_3 + \vartheta_3)$$

Setzt man $x = \frac{1}{5}$, $y = \frac{2}{5}$, so folgt ganz analog

$$\underline{(5)_2} \quad 4\vartheta_0(\tfrac{1}{5})\vartheta_3(\tfrac{2}{5}) = (\sqrt{5}O_0 + \vartheta_0)(\sqrt{5}O_3 - \vartheta_3)$$

In gleicher Weise ergeben sich aus $(C)_{14}$ $\underline{(5)_3}$ und $\underline{(5)_4}$ und aus $(C)_{13}$ $\underline{(5)_5}$ und $\underline{(5)_6}$.

Setzt mau für x und y resp. $\frac{\tau}{5}$ und $\frac{2\tau}{5}$, so erhält man ganz analog die Relationen für die imaginäre Periode § 5. (3).

Nachdem es so gelungen ist auf einem von Göring abweichenden Wege, ohne Hülfe der Schröter'schen Arbeiten, die Gleichungen herzustellen, von denen Göring ausgeht, um die einzelnen Teilwerte allein durch die transformirten Thetafunctionen auszudrücken, können wir im übrigen seinen sehr hübschen Entwicklungen folgen und bekommen so ganz elementar fünf verschiedene Darstellungen für die Teilwerte. Zu diesen kommt nun noch als sechste die, welche wir streng nach unsrer Methode erhalten haben.

Nachdem ich nun nachgewiesen habe, dass auch für die speciellen Fälle $n = 3$ und $n = 5$ unsre Methode nach jeder Richtung hin brauchbar ist, will ich für jetzt die Arbeit hier abschliessen. Offenbar wird sie auch für höhere Fälle $n = 7$ etc. ausreichend sein, da ja immer eine grosse Menge Bestimmungsgleichungen zur Verfügung stehen.

Ludwig Klage

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Möller, Ferdinand

Zur Transformation der Thetafunctionen Inaug.-Diss. von Rostock

Greifswald 1884
Math.p. 361 p
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11651482-5